Feynman, Hamilton e l’Odografa

Alessandro Amabile

1 Introduzione

Il 13 Marzo 1964 Richard Feynman tenne al California Institute of Technology una lezione dedicata al moto dei pianeti intorno al Sole. Per molto tempo considerata perduta, tale lezione è stata pubblicata nel 1997 in un volume curato dai coniugi Goodstein, colleghi e amici dello stesso Feynman.

La lezione comincia con una ricapitolazione delle tre leggi di Keplero nella loro formulazione più comune:

1. Le orbite planetarie sono delle ellissi, aventi il Sole in uno dei due fuochi;
2. Durante il moto il raggio vettore Sole-pianeta spazza aree uguali in tempi uguali;
3. Il rapporto tra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita è uguale per tutti i pianeti.

Il primo obiettivo di Feynman in questa introduzione è chiarire quale sia lo statuto delle leggi di Keplero all'interno della teoria newtoniana. Com'è noto, infatti, mentre le leggi di Keplero si limitano a *descrivere* i moti planetari, la teoria di Newton si propone di *dedurre* tali moti a partire da un certo numero di assunzioni iniziali, che Newton chiama *leggi del moto*. La cruciale differenza tra le "leggi" di Keplero e le "leggi" di Newton è spiegata molto chiaramente dai Goodstein:

> Kepler has given us three laws, and Newton has given us three laws. Kepler's laws, however, are of a vastly different character from Newton's. Kepler's laws are generalizations of observations of the heavens. They are what we would today call curve-fitting. [...] Newton's laws are of a radically different kind. They are really assumptions about the innermost nature of physical reality: the relations between matter, forces, and motion. If the behavior deduced from those assumptions is observed in nature, then the assumptions may be correct, and if that is the case then we have seen into nature's heart, or the mind of God, depending on your taste in metaphors. In the crucially important arena of planetary motions, the test of whether the Newtonian assumptions are correct is whether they give rise to the Keplerian laws, which summarize with great precision an immense amount of astronomical data.

Si noti che simili precisazioni sono necessarie a causa dell'ambiguità terminologica tipica della trattazione moderna di questi antichi problemi. Keplero, ad esempio, non usa mai il termine *legge*, e si riferisce alle sue "leggi" chiamandole a seconda dei casi *rapporti*, *proporzioni* o *teoremi*. D'altro canto lo stesso Newton in altri luoghi della sua opera si riferisce a quelle che nei *Principia* chiamerà *leggi* usando il termine *ipotesi*. Ricorrendo anche noi ad una terminologia più antica e più precisa, possiamo riassumere la situazione dicendo che le "leggi" di Keplero racchiudono i *fenomeni* che la teoria newtoniana si propone di *salvare* a partire da opportune *ipotesi*. Il fatto che Newton abbia attribuito poi a tali *ipotesi* lo statuto di *leggi*, fatto in sé ricco di vaste e profonde conseguenze, è in realtà indicativo, come sottolineano i Goodstein, solo di un particolare *taste of metaphors*.[1]

[1] Sull'uso della metafora della *legge* nella descrizione dei fenomeni naturali si veda Zilsel (1942).

Il secondo obiettivo dell'introduzione di Feynman è evidenziare quale sia stata la *logica* seguita da Newton nella trattazione del problema dei moti planetari. Nella prefazione alla seconda edizione dei *Principia*, pubblicata nel 1713, Roger Cotes descrive sinteticamente le varie fasi caratteristiche del metodo newtoniano, cardine di quella che Cotes chiama *filosofia sperimentale*:

> Coloro che praticano la filosofia sperimentale [...] procedono dunque con un duplice metodo, quello analitico e quello sintetico. Da una selezione di certi fenomeni, essi deducono, per via analitica, le forze della natura e le leggi più semplici di tali forze, dalle quali poi, per via sintetica, espongono la costituzione dei restanti fenomeni. Questo è indubbiamente il miglior modo di filosofare che, a preferenza di altri, il nostro illustre autore ha deciso di abbracciare.

Nell'affrontare il problema dei moti planetari, la parte *analitica* del metodo consiste nel dedurre dai *fenomeni*, cioè dalle leggi di Keplero, le caratteristiche proprie della forza di gravità. In particolare, dalla legge delle aree Newton deduce il carattere centrale della forza, mentre dalla terza legge deriva che tale forza deve decrescere come l'inverso del quadrato della distanza tra i corpi. La parte *sintetica* del metodo consiste infine nel dedurre, a partire dalla legge di forza così ottenuta e dalla legge fondamentale della dinamica, che le orbite sono delle ellissi aventi il Sole in uno dei fuochi (cioè il *fenomeno* restante, la prima legge di Keplero). Si perviene così all'integrazione delle tre leggi all'interno di un quadro teorico unitario, in cui la prima legge di Keplero si configura, in virtù delle ipotesi poste, come una conseguenza necessaria delle altre due (e viceversa). È questo, secondo Feynman, il risultato più importante raggiunto da Newton:

> On the other hand, what Newton discovered—and which was the most dramatic of his discoveries—was that the third law [Feynman means the First Law] of Kepler was now a consequence of the other two. Given that the force is toward the Sun, and given that the force varies inversely as the square of the distance, to calculate that subtle combination of variations and velocity to determine the shape of the orbit and to discover that it is an ellipse is Newton's contribution and therefore he felt that the science was moving forward, because he could understand three things in terms of two.

L'obiettivo della lezione di Feynman è, in sostanza, ripercorrere le orme di Newton, cioè "calcolare le sottili combinazioni di velocità e variazioni" e dimostrare così che le orbite sono delle ellissi aventi il Sole in uno dei due fuochi. Partendo dalle ipotesi newtoniane sul moto, nel resto della sua lezione Feynman seguirà passo passo i *Principia* per quanto riguarda la parte *analitica* del ragionamento, cioè nella deduzione della legge di gravitazione, mentre se ne discosterà nella successiva parte *sintetica*, cioè nella deduzione della forma dell'orbita. Feynman confessa infatti di non essere riuscito a seguire fino in fondo la dimostrazione riportata nei *Principia*, che fa uso di teoremi sulle sezioni coniche a lui sconosciuti. Nella lezione si propone dunque di presentare una diversa dimostrazione, da lui definita *elementare*, che risponde a un criterio ben preciso:

> I am going to give what I will call an elementary demonstration. [But] "elementary" does not mean easy to understand. "Elementary" means that very little is required to know ahead of time in order to understand it, except to have an infinite amount of intelligence. It is not necessary to have knowledge but to have intelligence, in order to understand an elementary demonstration. [...] So by an elementary demonstration I mean one that goes back as far as one can with regard to how much has to be learned. [...] Secondly, this demonstration is interesting for another reason—it uses completely geometrical methods. [...]

La costruzione presentata da Feynman è interessante per diversi motivi... ecc ecc

2 L'Ellisse

La prima delle poche cose che bisogna sapere per comprendere la dimostrazione di Feynman è, ovviamente, cosa si intende quando si parla di orbita *ellittica*, cioè *che cos'è* un'ellisse. Esistono, com'è noto, diversi modi equivalenti di caratterizzare una curva ellittica. Le diverse definizioni si equivalgono nella misura in cui mettono capo allo stesso *luogo piano di punti*, ma nella fattispecie ogni definizione chiama in causa linguaggi, concetti e tecniche di costruzione differenti. Limitandosi al linguaggio geometrico, ne possiamo elencare almeno cinque.

La definizione più elementare di ellisse, da cui parte anche Feynman, è quella di luogo piano dei punti la cui somma delle distanze da due punti fissi, detti *fuochi*, è costante. Tale definizione realizza sul piano teorico la costruzione con filo e pioli, detta talvolta *metodo del giardiniere*. La circonferenza si ottiene come caso particolare dell'ellisse quando i due fuochi coincidono.

Una seconda definizione di ellisse è quella di curva chiusa ottenuta dall'intersezione di un piano e di un tronco di cono, ovvero mediante una *sezione conica*. Tale definizione ha il pregio di connettere logicamente l'ellisse alla parabola e all'iperbole, le altre possibili sezioni di un cono. Anche in questo caso, la circonferenza si configura come caso particolare dell'ellisse, laddove il piano che interseca il cono è parallelo alla base del cono stesso.

Una terza definizione che analogamente alla precedente unifica la trattazione delle sezioni coniche fa ricorso a concetti di pura geometria piana: una sezione conica è infatti definibile come il luogo dei punti la cui distanza da un punto fisso, detto *fuoco*, è proporzionale alla distanza da una retta fissata, detta *direttrice*. La costante di proporzionalità, che coincide con l'*eccentricità*, identifica univocamente il tipo di curva: per $0 < e < 1$ si ottiene un'ellisse, per $e = 1$ una parabola e per $e > 1$ un'iperbole. A meno di non ricorrere a concetti di geometria proiettiva, in questo approccio la circonferenza non è definibile.

Una quarta definizione fa invece uso delle proprietà *ottiche* dell'ellisse, in virtù delle quali ogni raggio di luce che abbia origine in un fuoco, riflettendosi sulla curva stessa, passerà per l'altro fuoco. Assumendo tale proprietà come definizione, e dimostrandone l'equivalenza con la definizione del giardiniere, Feynman perviene al metodo di costruzione dell'ellisse che chiameremo *metodo delle tangenti*. Con riferimento alla Figura 1, partendo dal punto F_1, le lunghezze $\overline{F_1 p}$ ed $\overline{F_1 F_2}$ sono scelte arbitrariamente (con il vincolo $\overline{F_1 F_2} < \overline{F_1 p}$), mentre il punto P è costruito

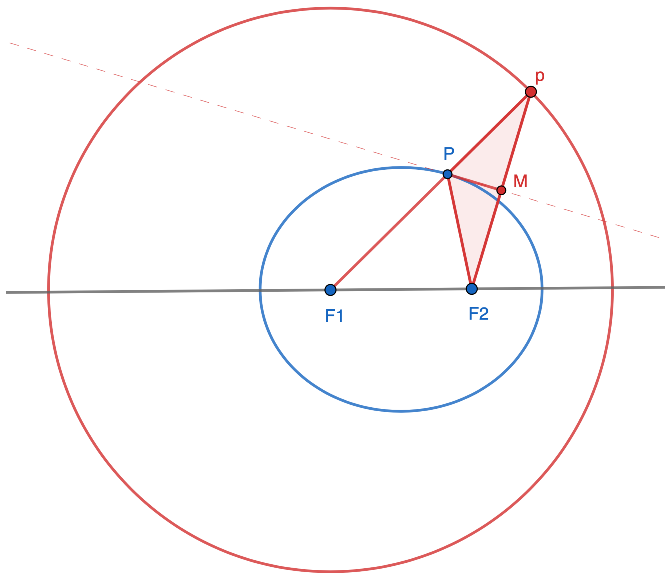


Figura 1: Il metodo delle tangenti per la costruzione di un'ellisse. Il punto p, muovendosi lungo la circonferenza di centro F_1, genera l'ellisse di fuochi F_1 e F_2.

come intersezione del segmento F_1p e dell'asse del segmento F_2p. Mentre il punto p percorre la circonferenza di centro F_1, il punto P così individuato traccerà un'ellisse di fuochi F_1 e F_2. Per costruzione i triangoli F_2PM e pMP sono congruenti e l'asse del segmento F_2p coincide con la retta tangente l'ellisse in P, da cui il nome del metodo. Si verifica facilmente che $a = \overline{F_1p}$, cioè il raggio della circonferenza determina l'asse maggiore dell'ellisse risultante, la cui eccentricità è data da $e = \overline{F_1F_2}/\overline{F_1p}$ ed è per costruzione minore dell'unità. Scegliendo opportunamente le lunghezze $\overline{F_1p}$ e $\overline{F_1F_2}$ è dunque possibile costruire un'ellisse di *forma* e *dimensioni* arbitrarie, indicando con queste espressioni rispettivamente l'eccentricità e e l'asse maggiore a. Se si fissa la circonferenza, l'unico parametro libero diventa l'eccentricità e. In altri termini, data una circonferenza *qualunque* il metodo delle tangenti permette di costruire al suo interno un'ellisse di forma *assegnata*.

Il metodo delle tangenti mette capo a una quinta definizione di ellisse, basata non sulla *retta* ma sulla *circonferenza direttrice*.[2] Come Feynman dimostra più avanti nella sua lezione, tutte le sezioni coniche ammettono come curve direttrici, oltre alla retta, almeno una circonferenza. In particolare, nel caso dell'ellisse la prima circonferenza direttrice si identifica con quella tracciata da p nel metodo delle tangenti sopra descritto. È evidentemente possibile invertire i ruoli dei due fuochi, ottenendo in tal modo la seconda circonferenza direttrice, identica alla precedente ma centrata su F_2 (Fig. 2). Dati due punti, l'ellisse si può dunque definire come il luogo piano dei punti equidistanti dal primo punto e dalla circonferenza direttrice avente il centro nell'altro punto.

Se ogni ellisse ammette due circonferenze direttrici identiche, è altresì vero che ogni circonferenza data può essere riguardata come la direttrice di due ellissi

[2]Tale approccio alla costruzione delle curve è stato sviluppato, tra gli altri, da Colin Maclaurin (1698 - 1714) nel trattato *Geometrica Organica, Sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis.*

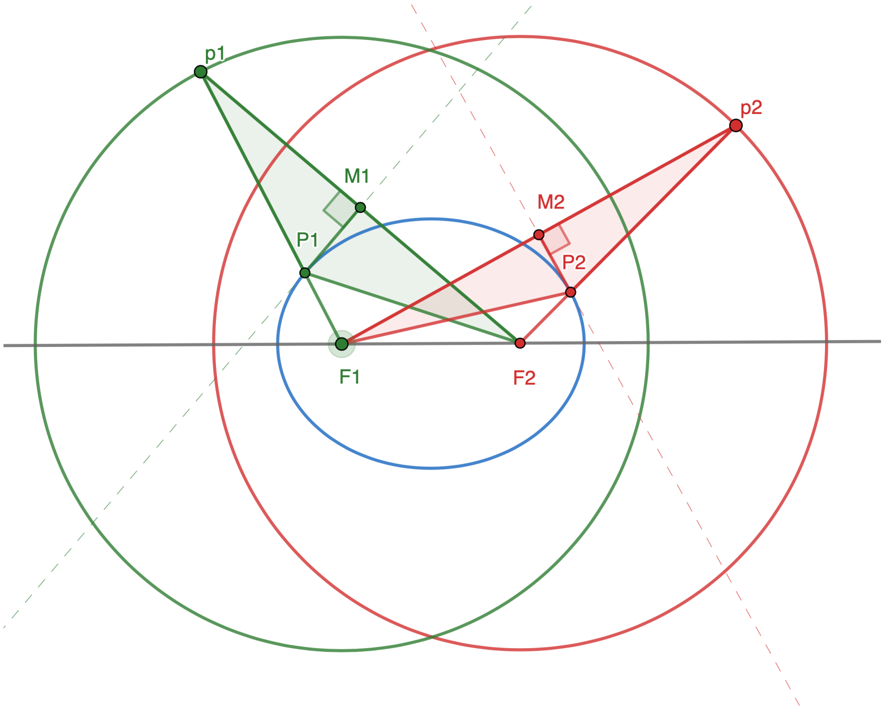


Figura 2: Ogni ellisse ammette due circonferenze direttrici identiche, centrate sui due fuochi.

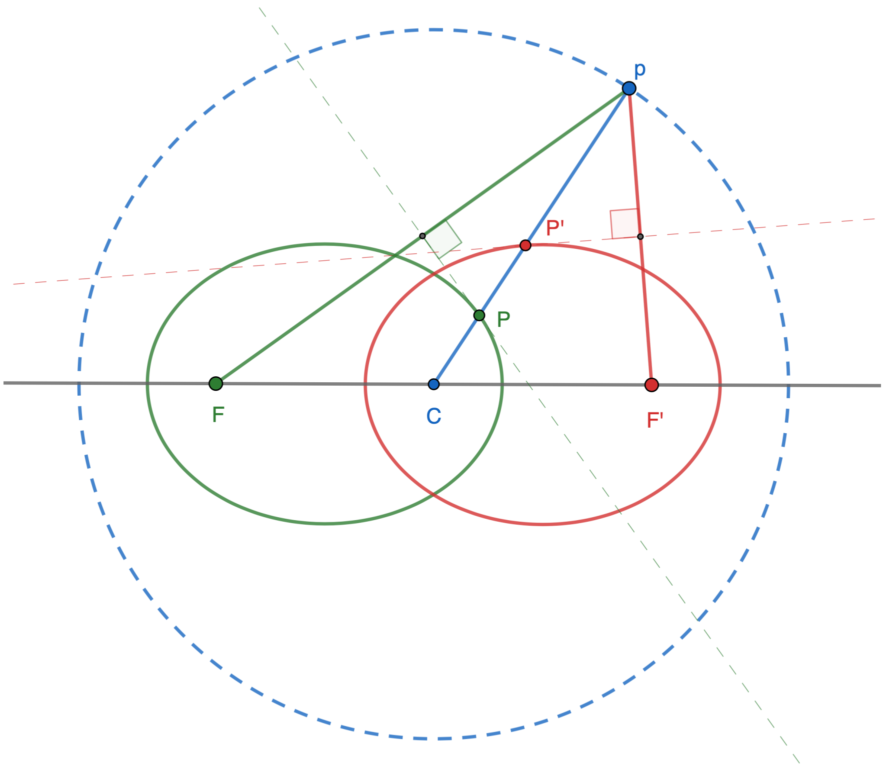
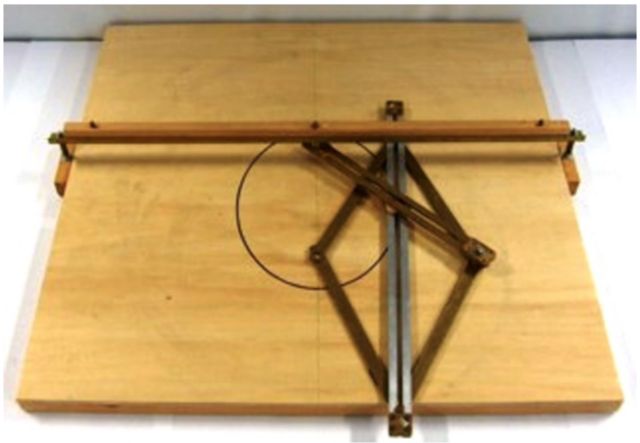
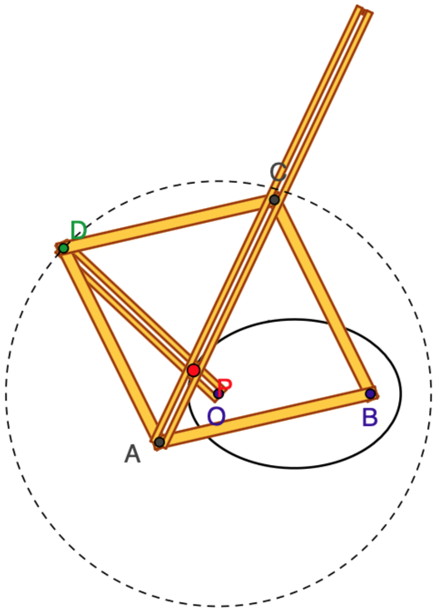


Figura 3: Ogni circonferenza può essere riguardata come la circonferenza direttrice di due ellissi identiche costruite sul medesimo diametro.



(a) Modello reale.



(b) Schema meccanico. Al moto circolare del punto D, mosso dall'utente, corrisponde il moto ellittico del punto P.

Figura 4: Ellissografo con rombo articolato.

identiche costruite sul medesimo diametro. Come si vede in Figura 3, il centro della circonferenza direttrice assume il ruolo di secondo fuoco dell'ellisse sinistra, in verde, e di primo fuoco dell'ellisse destra, in rosso. Più in generale, con il metodo delle tangenti è possibile costruire all'interno della stessa circonferenza direttrice un numero arbitrario di ellissi, che potranno differire per orientamento e forma ma necessariamente avranno un fuoco in comune, ovvero il centro della comune circonferenza direttrice.

Le altre sezioni coniche si possono ottenere con una costruzione identica se si rilascia il vincolo $\overline{F_1F_2} < \overline{F_1p}$: se si sceglie il primo fuoco appartenente alla circonferenza direttrice ($e = 1$) si ottiene un ramo di parabola; se si sceglie esterno ad essa ($e > 1$) il risultato è un ramo di iperbole. Con questa definizione la circonferenza è di nuovo ottenuta come caso particolare laddove si facciano coincidere i due fuochi ($e = 0$). Notiamo tuttavia che in tale approccio la circonferenza assume un ruolo concettualmente privilegiato, essendo la comune curva direttrice di tutte le sezioni coniche.

La costruzione delle curve basata sulla circonferenza direttrice ha il pregio di prestarsi naturalmente alla *meccanizzazione*. Sul metodo delle tangenti si basa ad esempio il funzionamento dell'*ellissografo a parallelogramma articolato*, mostrato in Figura 4: l'utente muove il punto C intorno alla circonferenza direttrice, e grazie al parallelogramma articolato al movimento circolare di C corrisponde la curva ellittica percorsa da P. Su sistemi di aste incernierate simili si basa il funzionamento di *iperbolografi*, *parabolografi* e molti altri strumenti che hanno in generale la funzione di trasformare una curva in un'altra curva, ciò che è, a ben vedere, il fine ultimo di qualunque *macchina* o *meccanismo*.[3]

3 La *Lezione Perduta* di Feynman

Il punto fondamentale in cui Feynman si allontana da Newton è essenzialmente nel modo in cui *indicizza* il moto dei pianeti rispetto al Sole. Con quella che i Goodstein paragonano a una «brlliant, unexpected move by a chess prodigy» Feynman divide il moto in *settori angolari uguali* rispetto al centro attrattore immobile, a differenza di Newton che nei *Principia* divide il moto in *intervalli temporali uguali*. Si noti che ciò equivale a scegliere come parametro d'evoluzione, in luogo del *tempo newtoniano*, una grandezza realmente osservabile, che coincide con l'angolo spazzato dal corpo rispetto ad uno sfondo fisso così com'è misurato da un osservatore posto nel centro attrattore immobile.

Se vale la legge delle aree, settori angolari uguali corrispondono in generale a intervalli di tempo diseguali, ma secondo un preciso rapporto reciproco: i vari triangoli in cui è così decomposto il moto sono infatti simili, e hanno quindi le aree proporzionali tra loro. La seconda legge di Keplero asserisce che l'area spazzata dal raggio vettore Sole-pianeta è proporzionale al tempo impiegato dal pianeta a percorrere l'elemento di orbita corrispondente. Poiché l'area dA di un triangolo elementare di ampiezza angolare $d\theta$ è data da $\frac{1}{2}r^2 d\theta$, gli intervalli di tempo corrispondenti ai diversi intervalli angolari sono tra loro nella stessa proporzione dei quadrati delle distanze Sole-pianeta nei medesimi intervalli. In formule, $dt \propto r^2$, essendo r la distanza media Sole-pianeta nell'intervallo temporale considerato. Se si assume la legge di gravitazione di Newton, cioè se $F \propto r^{-2}$, dalla legge fondamentale della dinamica si ha che in ogni intervallo $dv = Fdt = cost$. Questa scelta permette dunque a Feynman di pervenire al seguente risultato: *sotto le ipotesi newtoniane sul moto, ad uguali intervalli di anomalia rispetto al centro attrattore corrispondono uguali variazioni del modulo della velocità*. Sempre dalla legge fondamentale della dinamica deriva inoltre che le direzioni delle variazioni di velocità sono in ogni punto parallele alla direzione Sole-pianeta, sicchè anche la *variazione di direzione della velocità, cioè la rotazione angolare del vettore velocità, è la stessa in settori angolari uguali*:

> That's the central core from which all will be deduced - that equal changes in velocity occur when the orbit is moving through equal angles.

Noti modulo e direzione delle variazioni di velocità in ogni intervallo angolare, è possibile infatti costruire il diagramma di velocità complessivo a partire da un'arbitraria velocità iniziale, che possiamo per semplicità porre uguale all'unità. Il risultato che si ottiene iterando la procedura fino a tornare al punto iniziale dell'orbita è mostrato in Figura 5: si tratta di un poligono regolare, i cui lati rappresentano le variazioni di velocità nel relativo settore dell'orbita. Nel limite di settori angolari infinitesimi, il poligono regolare tende a una *circonferenza*.

[3]Vedi Conti e Giusti, *Oltre il compasso.*

Notiamo che tale circonferenza è individuata dagli *estremi* dei vettori velocità, i quali sono posti in un punto *eccentrico* rispetto alla circonferenza stessa.[4]

Le corrispondenze tra diagramma dell'orbita e diagramma delle velocità sono mostrate in Figura 6. L'angolo al centro del diagramma di velocità coincide con l'anomalia planetaria *vera*, mentre la variazione di velocità è rappresentata in ogni settore angolare del diagramma delle velocità dalla corda che ne connette gli estremi, per costruzione parallela alla direzione Sole-pianeta nel punto medio del corrispondente settore sul diagramma dell'orbita.

Si noti che nella costruzione del diagramma di velocità non compare alcuna quantità *assoluta*: ciò che conta è solo la reciproca *proporzione* tra i vettori velocità nelle diverse posizioni angolari del pianeta rispetto al centro delle forze, ovvero la *struttura* del diagramma mostrato in Figura 5: in tale struttura è racchiusa la cinematica, cioè, in sostanza, la seconda legge di Keplero. In altri termini l'*estensione* del diagramma di velocità mostrato in Figura 5 è arbitraria e dipende, in ultima analisi, dalle unità di misura scelte: è possibile dunque riscalare l'intero diagramma, a patto di conservare le medesime proporzioni tra i vettori velocità, senza alterarne il significato. Tale circostanza autorizza a sovrapporre il diagramma dell'orbita a quello delle velocità, identificando il Sole con il punto C, centro della circonferenza tracciata dagli estremi dei vettori velocità, posti tutti in un'origine comune O eccentrica alla circonferenza stessa. Si noti tuttavia che, così facendo le lunghezze dei vettori del diagramma di velocità risulteranno *proporzionali*, ma non identiche, alle velocità rappresentabili sul diagramma delle posizioni.

Feynman riassume così la situazione a questo punto della dimostrazione:

> So here is the problem, here's what we have discovered: that if we draw a circle and take an off-center point, then take an angle in the orbit—any angle you want in the orbit—and draw the corresponding angle inside this constructed circle and draw a line from the eccentric point, then this line will be the direction of the tangent. Because the velocity is evidently the direction of motion at the moment and is in the direction of the tangent to the curve. So our problem is to find the curve such that if we draw a point from an eccentric center, the direction of the tangent of that curve will always be parallel to that [il vettore velocità del diagramma] when the angle of the curve is given by the angle in the center of [the velocity circle].

Per proseguire, è conveniente ruotare di 90° il diagramma di velocità. In questo modo le corrispondenze col diagramma dell'orbita risulteranno invariate, con l'avvertenza che le direzioni dei vettori del diagramma di velocità ruotato risulteranno *perpendicolari* alle velocità nel corrispondente punto dell'orbita. Parafrasando Feynman, il problema si formula dunque nel modo seguente: qual è quella curva interna a una circonferenza di centro C avente in ogni punto la tangente perpendicolare al segmento che congiunge un punto della circonferenza e un punto

[4]Come sottolinea lo stesso Feynman, nonostante stiamo parlando di *vettori*, non è necessario in questa descrizione possedere tale nozione nel senso moderno. Ciò che stiamo chiamando *vettori* sono in effetti *direzioni nel piano*, mentre il luogo dei punti occupato dagli estremi dei vettori non è altro che una curva giacente sul medesimo piano. Si tratta cioè dello studio di una curva di cui sono date le regole di costruzione, cioè, come preannunciato da Feynman, di pura geometria.

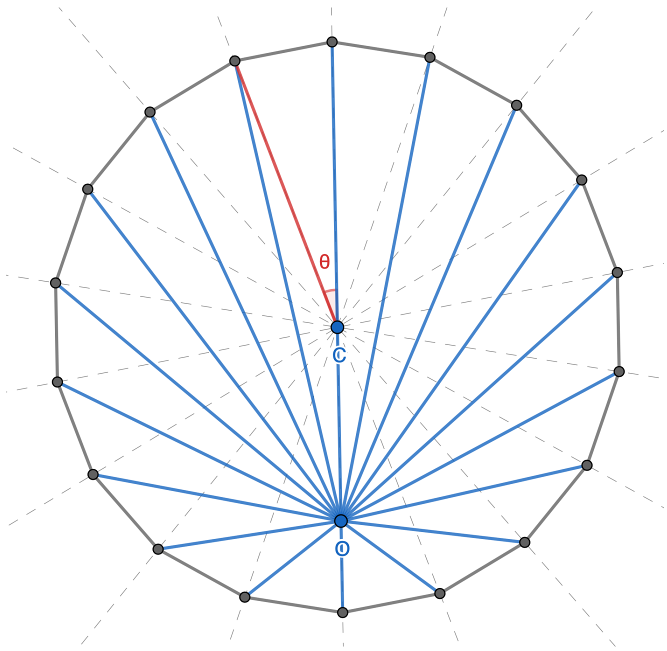


Figura 5: Il diagramma delle velocità di un pianeta in orbita intorno a un centro immobile delle forze, secondo le leggi di Newton.

eccentrico O assegnato? La risposta è fornita dal metodo delle tangenti, applicando il quale si trova che la figura cercata è un'ellisse di fuochi O e C e circonferenza direttrice coincidente con quella tracciata dagli estremi dei vettori velocità (Fig. 7). In virtù delle corrispondenze individuate tra diagramma dell'orbita e diagramma delle velocità, il Sole si identifica con il centro del diagramma di velocità, cioè con uno dei fuochi dell'ellisse trovata. Vale, dunque, la prima legge di Keplero. QED.

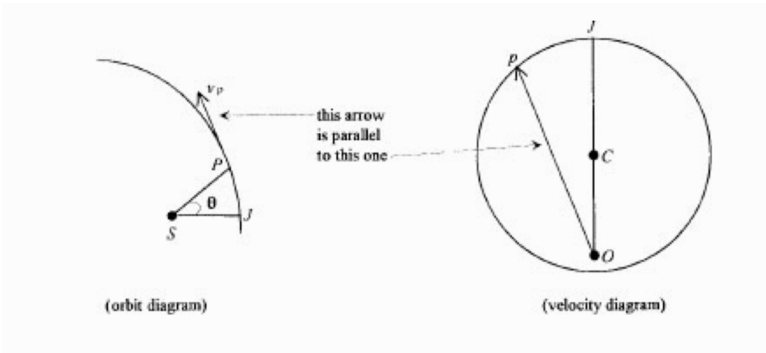
Ricorrendo alla terminologia introdotta nel paragrafo precedente, i risultati raggiunti da Feynman, rappresentati dalla costruzione in Figura 7, si possono riassumere e generalizzare nel modo seguente:

1. Il diagramma di velocità di un qualunque corpo soggetto alla legge di gravitazione di Newton è una circonferenza, il cui centro coincide con il centro immobile delle forze;

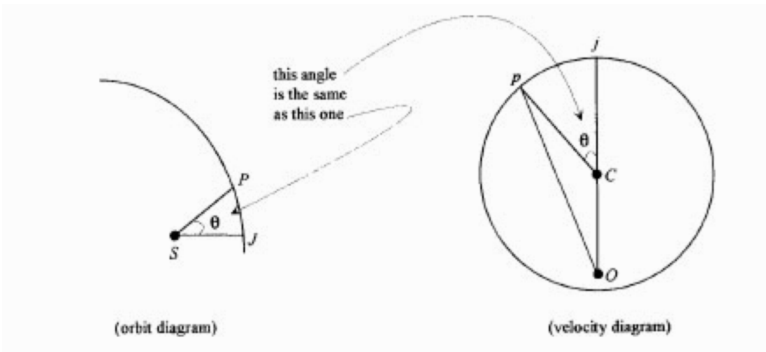
2. L'orbita del corpo intorno al centro delle forze è rappresentata *in scala* dall'ellisse sinistra costruita mediante il *metodo delle tangenti* sul diametro che collega i punti di massima e minima velocità, che individuano la linea apsidale del moto e l'asse principale dell'orbita;

3. Quando il corpo si trova nella posizione angolare θ rispetto al centro delle forze la sua velocità è rappresentata dalla distanza che separa il punto della circonferenza direttrice individuato dall'angolo θ e il fuoco vuoto dell'orbita costruita al suo interno.

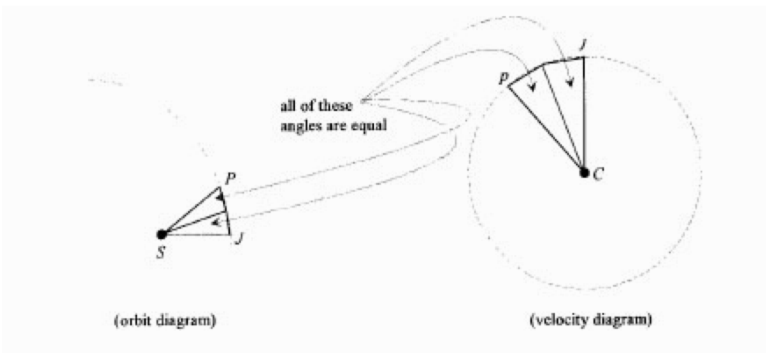
Al di là della bellezza, l'idea cardine della dimostrazione di Feynman consiste nel costruire l'orbita come *curva integrale* del campo vettoriale delle velocità, la cui struttura determina univocamente la *forma* dell'orbita. La struttura di tale



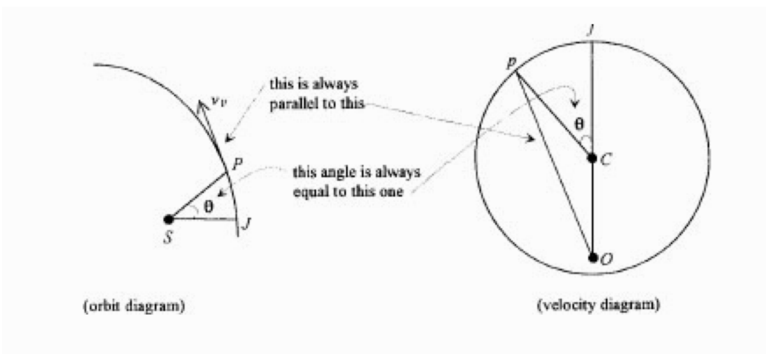
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6: Corrispondenze tra il diagramma dell'orbita e diagramma delle velocità.

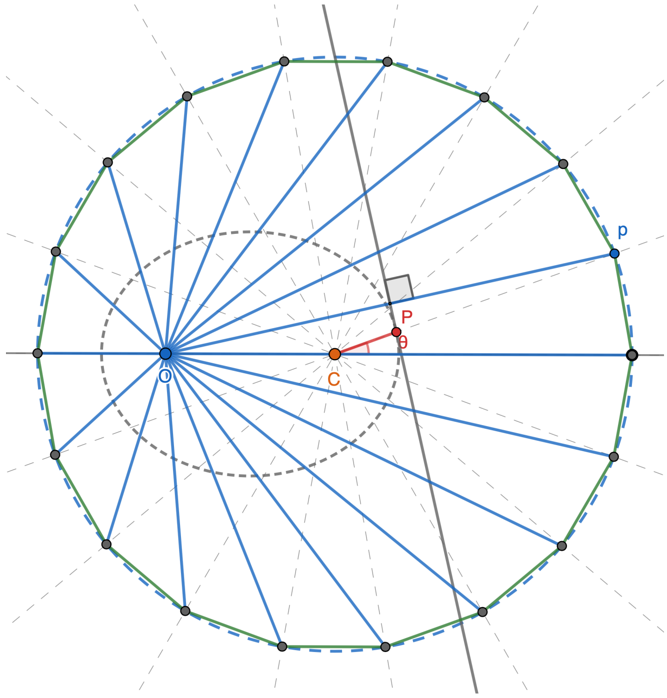


Figura 7: Costruzione dell'orbita a partire dal diagramma delle velocità.

campo, mostrata in Figura 5, è univocamente determinata dalle ipotesi generali sul moto assunte da Newton e dalle particolari caratteristiche della forza di gravità (simmetria centrale e modulo proporzionale all'inverso del quadrato).

Usando un termine meno elementare, l'approccio della lezione di Feynman potrebbe essere sinteticamente descritto come *hamiltoniano*. Nella formulazione hamiltoniana della meccanica le posizioni e le velocità vengono trattate come variabili indipendenti e l'evoluzione del sistema è descritta dalle *equazioni canoniche*, accoppiate l'una all'altra mediante un'opportuna funzione, detta *hamiltoniana*. Postulate la forma delle equazioni canoniche, che racchiude la legge fondamentale della dinamica newtoniana, è la *struttura* della funzione hamiltoniana che, fissando le proporzioni tra posizioni, velocità e variazioni di velocità, determina l'evoluzione del sistema. Le corrispondenze definite dalla dinamica newtoniana e dalla legge di gravitazione dell'inverso del quadrato, utilizzate da Feynman nella costruzione dei suoi diagrammi (Fig. 6), sono esattamente quelle racchiuse nella struttura delle equazioni canoniche e nella forma della funzione hamiltoniana che descrive il sistema a due corpi in interazione gravitazionale. Nel caso di sistemi isolati, come quello in esame, l'hamiltoniana è indipendente dal tempo e coincide con l'energia meccanica, quantità conservata dal sistema nella sua evoluzione. In questi casi, è possibile rappresentare il moto mediante un singolo diagramma geometrico, in cui, di fatto, *il tempo newtoniano non compare*.

La costruzione mostrata in Figura 7 può essere considerata a tutti gli effetti un diagramma *polare* delle velocità, ovvero il ritratto di fase del moto *angolare* di un corpo intorno a un centro immobile che esercita una forza variabile come l'inverso del quadrato.[5] Notiamo che non si tratta del ritratto di fase del moto

[5]Lo stesso Feynman in coda alla lezione sottolinea la generalità del metodo, notando come

spaziale poiché i vettori posizione e velocità non sono rappresentati nella medesima *scala.* Tuttavia l’orbita reale sarà un’ellisse *simile* a quella trovata, nel senso della similarità tra sezioni coniche, e tanto basta a Feynman, interessato com’è nella sua lezione solo alla *forma* dell’orbita. Essendo il sistema conservativo, come si è detto, in Figura 7 il tempo non compare esplicitamente, e il ruolo di parametro evolutivo è svolto dall’angolo polare o *anomalia vera.*

La dimostrazione di Feynman ha inoltre il pregio di evidenziare un fatto di validità generale, che è al cuore della formulazione hamiltoniana della meccanica: fissata la *dinamica*, cioè l’hamiltoniana, *cinematica* e *geometria* sono due facce della stessa medaglia, due aspetti complementari di quel fenomeno che sinteticamente chiamiamo *moto.* Del resto è evidente che a prescindere dalla logica seguita da Newton nei *Principia* (ripresa poi da Feynman nella sua lezione) non è possibile stabilire una gerarchia logica tra le leggi di Keplero, che, come si è ricordato, assumono nella teoria newtoniana il ruolo di *teoremi.* Se è vero, citando Bateson, che *la "prova" di un teorema è la dimostrazione che il teorema era effettivamente tutto implicito negli assiomi e nelle definizioni*, ciò vale per tutti i teoremi deducibili a partire dalle stesse ipotesi: prima e seconda legge di Keplero, che descrivono geometria e cinematica dei moti planetari, sono due particolari nodi di quell’aggregato di proposizioni che discendono dalle ipotesi sul moto di Newton e che, collettivamente, costituiscono la cosiddetta *meccanica newtoniana.*[6]

4 La *Legge dell’Odografa Circolare*

Che un sapore *hamiltoniano* avvolga la lezione di Feynman non è, ovviamente, una coincidenza. Proprio al lavoro di William Hamilton risale infatti l’approccio geometrico adottato da Feynman nel trattare il problema dei moti planetari. In un articolo intitolato *The Hodograph, or a new method of expressing in symbolical language the newtonian law of attraction*, pubblicato nei *Proceedings of the Royal Irish Academy* nel 1847, Hamilton mette a punto un metodo puramente geometrico per rappresentare un moto qualsivoglia che avvenga secondo le leggi di Newton. La lettura dell’articolo originale, breve ma denso, è estremamente interessante, ed è per questo che nel seguito ne riporteremo alcuni estratti. Come si vedrà, la lezione di Feynman costituisce un originale, brillante e pedagogico esempio di applicazione del metodo di Hamilton.[7]

Hamilton comincia con alcune considerazioni di carattere generale, che culminano nella definizione della cosiddetta *odografa*:

---

tutte le possibili orbite, cioè tutte le sezioni coniche, possono essere generate dal diagramma di velocità circolare scegliendo l’origine delle velocità esterno o giacente sulla circonferenza stessa. Ad esempio di ciò, Feynman accenna ad una deduzione della formula di Rutherford per la diffusione di particelle α, in cui tra l’altro, lo ricordiamo, la forza agente è *repulsiva.*

[6] Nonostante Feynman dica esplicitamente che la prima legge di Keplero è una <conseguenza» delle altre due, non vi è dubbio che sarebbe d’accordo con Bateson, come si evince dalla discussione che svolge in cit.laleggefisica.

[7] Più precisamente, la trattazione di Feynman è molto simile a quella svolta da James Clerk Maxwell in *Matter and Motion* (1877), in cui Maxwell semplifica notevolmente alcuni passaggi e l’interpretazione della costruzione complessiva mediante la rotazione di 90° del diagramma di velocità che abbiamo visto alla fine della lezione di Feynman.

> Whatever may be the complication of the accelerating forces[8] which act on any moving body, regarded as a moving point, and, therefore, however complex may be its *orbit*, we may always imagine a succession of straight lines, or vectors, to be drawn from some one point, as from a common origin, in such a manner as to represent, by their directions and lengths, the varying directions and degrees (or quantities) of the velocity of the moving point: and the curve which is the locus of the ends of the straight lines so drawn may be called the *hodograph* of the body, or of its motion, by a combination of the two Greek words, οδος, a *way*, and γραφω, *to write* or *describe*, because the vector of this hodograph, which may also be said to be the *vector of velocity* of the body, and which is always parallel to the tangent at the corresponding point of the orbit, marks out or indicates at once the *direction* of the momentary path or way in which the body is moving, and the *rapidity* with which the body, at that moment, is moving in that path or way.

L'odografa dunque non è altro che la curva tracciata nel limite continuo dagli estremi dei vettori velocità dei diagrammi costruiti da Feynman nella sua lezione. Hamilton tratta le velocità come grandezze indipendenti e, in prima battuta, autonome rispetto alle posizioni. Posizioni e velocità sono rappresentate da due curve nello spazio, l'*orbita* e *l'odografa*, che insieme racchiudono la geometria e la cinematica del moto considerato. È interessante inoltre che Hamilton parli di *gradi di velocità*, intendendo che a partire da una velocità assunta come unità, tutte le altre possono essere espresse in rapporto a questa. Come già notato a proposito della costruzione di Feynman, si tratta anche in questo caso di una descrizione *intrinseca* del moto.

Hamilton procede descrivendo il legame che sussiste fra orbita, odografa e forze agenti sul corpo:

> This hodographic curve is even more immediately connected than the orbit with the *forces* which act upon the body, or with the varying resultant of those forces, for the tangent to the hodograph is always parallel to the direction of this resultant; and if the element of the hodograph be divided by the element of the time, the quotient of this division represents (to the usual units) the intensity of the same resultant force; so that the whole accelerating force which acts on the body at any one instant is represented, both in direction and magnitude, by the element of the hodograph, divided by the element of the time. We have also the general proportion, that *the force is to the velocity, in any varied motion of a point, as the element of the hodograph is to the corresponding element of the orbit.*

Le forze agenti, cioè le accelerazioni, fungono dunque da *trait d'union* tra l'orbita e l'odografa, tra geometria e cinematica del moto: tutta la dinamica del sistema in esame, cioè il legame che in ogni punto del moto sussiste tra posizioni, velocità e accelerazioni, è racchiusa nelle *proporzioni* che legano elementi dell'odografa e corrispondenti elementi dell'orbita; la dinamica, in altri termini, *vincola* la geometria alla cinematica e viceversa.

[8] Rifacendosi a una terminologia risalente a Newton, oggi desueta, Hamilton chiama *forza acceleratrice* il rapporto F/m tra la forza agente sul corpo e la massa del corpo stesso.

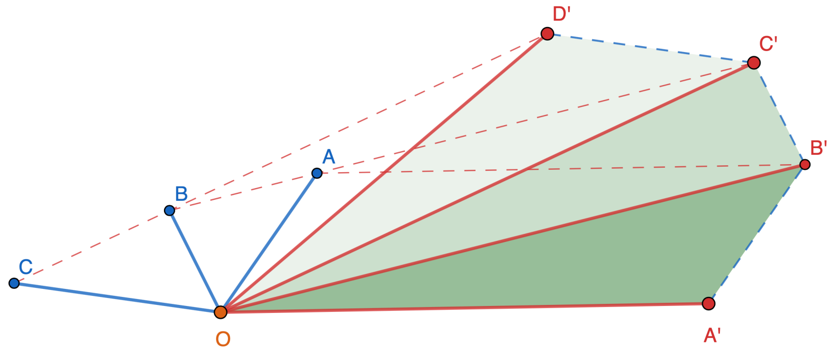


Figura 8: Ritratto di fase di un moto che avviene sotto l'azione di una forza centrale.

Notiamo, in particolare, che nel discorso di Hamilton il *tempo* assume la mera funzione di parametro esterno, che non compare esplicitamente né nel diagramma delle posizioni né in quello delle velocità e non ha, *a priori*, particolare significato fisico. L'unico requisito che deve soddisfare il *tempo* in questa descrizione è quello di essere una quantità *continua*, e qualunque parametro che soddisfi tale requisito di continuità può essere equivalentemente utilizzato per tracciare l'*evoluzione* del sistema in esame. Se si sceglie un parametro diverso dal *tempo* l'unica conseguenza è che le varie grandezze in gioco saranno rappresentate in unità diverse da quelle che Hamilton chiama *usual units*. In particolare, come abbiamo visto, la scelta di Feynman di dividere l'orbita in settori angolari uguali equivale ad utilizzare l'angolo polare (o *anomalia vera*) come parametro d'evoluzione. In una prospettiva più moderna, se il parametro d'evoluzione è fornito dal moto di un *orologio* tale parametro può ancora considerarsi un *tempo*, intendendo però questo termine nel senso einsteiniano di *moto di riferimento* che *definisce* l'intervallo di *tempo*, piuttosto che *registrarlo* come idealmente farebbe un orologio nel senso inteso da Newton. Il punto essenziale è che *tutte* le grandezze rilevanti alla descrizione del moto, incluso il tempo, sono così ricondotte a grandezze *geometriche*. Si comprende dunque in che senso l'approccio di Hamilton metta capo ad una *geometrizzazione della meccanica newtoniana*, nella quale non vi è, come si vede, alcuna ragione di introdurre le nozioni squisitamente metafisiche di tempo, spazio e moto *assoluti*. Il correlato naturale di tale geometrizzazione è il carattere intrinsecamente *relativistico* della descrizione del moto proposta da Hamilton.

Fatte queste considerazioni generali, Hamilton restringe la sua attenzione al caso in cui l'unica forza agente sul corpo in esame sia *centrale*, cioè diretta in ogni istante verso uno stesso punto dello spazio. Scegliendo tale punto, il *centro immobile delle forze*, come origine dei vettori velocità rispetto a tale centro medesimo, Hamilton costruisce a partire da un generico vettore dell'odografa il corrispondente vettore dell'orbita, posto anch'esso nel centro delle forze e per ipotesi *parallelo* alla variazione di velocità, cioè alla tangente all'odografa in quel punto. Hamilton perviene così al seguente risultato:

> the two vectors [of the orbit and of the hodograph], and the two tangents drawn at their extremities, enclose at each moment a *parallelogram*, of which it is easily seen that the *plane and area are constant*, although its position

> and its shape are generally variable from one moment to another, in the motion thus performed under the influence of a central force.

Si tratta, ovviamente, della seconda legge di Keplero, cioè della conservazione del *momento angolare*, vettore avente direzione perpendicolare ai vettori posizione e velocità e modulo proporzionale all'area del parallelogramma da essi racchiuso. La costruzione descritta da Hamilton è mostrata in Figura 8: i vari settori corrispondono a uguali intervalli del parametro d'evoluzione, e l'area del parallelogramma menzionato da Hamilton è pari al doppio dell'area triangolare in verde, che rappresenta la *velocità areolare* oggetto della seconda legge di Keplero. In formule, $\dot{A} \equiv dA/d\lambda = \frac{1}{2} rv \sin\theta = cost$, essendo λ un generico parametro d'evoluzione avente le dimensioni di un *tempo*, $v \equiv \frac{dr}{d\lambda}$ e θ l'angolo compreso tra i vettori posizione e velocità. Notiamo che una forza agente diversa avrebbe il solo effetto di traslare i punti B', C' e D' lungo le direzioni AB', BC' e CD', parallele alla direzione corpo-centro delle forze nell'istante considerato. In ogni settore il triangolo risultante avrà la base in comune col precedente e la sua stessa altezza, essendo costruito tra le medesime rette parallele. Avrà, dunque, la stessa area, *qualunque sia la forza centrale agente.*[9]

Dalla conservazione della quantità $rv\sin\theta$ deriva immediatamente la relazione

$$v \propto \frac{1}{r\sin\theta}, \tag{1}$$

che traduce in formule il primo corollario al teorema che nei *Principia* di Newton esprime la legge delle aree:[10]

> In spazi privi di resistenza, la velocità di un corpo attratto verso un centro immobile è inversamente proporzionale alla perpendicolare condotta da quel centro sulla linea retta che è tangente all'orbita. La velocità, infatti, in quei luoghi A', B', C', D', E' è proporzionale alle basi $A'B', B'C', C'D', D'E', E'F'$ dei triangoli uguali, e queste basi sono inversamente proporzionali alle perpendicolari condotte sulle stesse.

Con riferimento alla Figura 9, $r\sin\theta$ è la distanza tra il centro immobile delle forze e la retta tangente l'orbita nel punto considerato. Il fatto che Newton riguardi la legge delle aree come teorema e la relazione (1) come corollario non ha alcuna importanza, trattandosi, evidentemente, di due modi diversi di descrivere la medesima cinematica. Tuttavia, per distinguerla dalla legge delle aree, chiameremo la (1) *legge delle distanze*. A dispetto di tale equivalenza, infatti, che appare evidente nell'approccio geometrico di Hamilton, legge delle aree e legge delle distanze presentano differenze concettuali profonde. Non a caso si tratta di due descrizioni della cinematica planetaria risalenti allo stesso Keplero, ma la cui

[9] Ci soffermiamo su fatti ben noti, il cui profondo significato è tuttavia spesso celato dal formalismo del calcolo vettoriale, che sostituisce complesse costruzioni geometriche con semplici operazioni assiomatizzate tra simboli. Notiamo che il calcolo vettoriale venne sistematizzato solo agli inizi del '900 da Gibbs e Heaviside a partire dalla teoria dei *quaternioni*, invenzione dello stesso Hamilton.

[10] cit. Principia. notazione leggermente modificata.

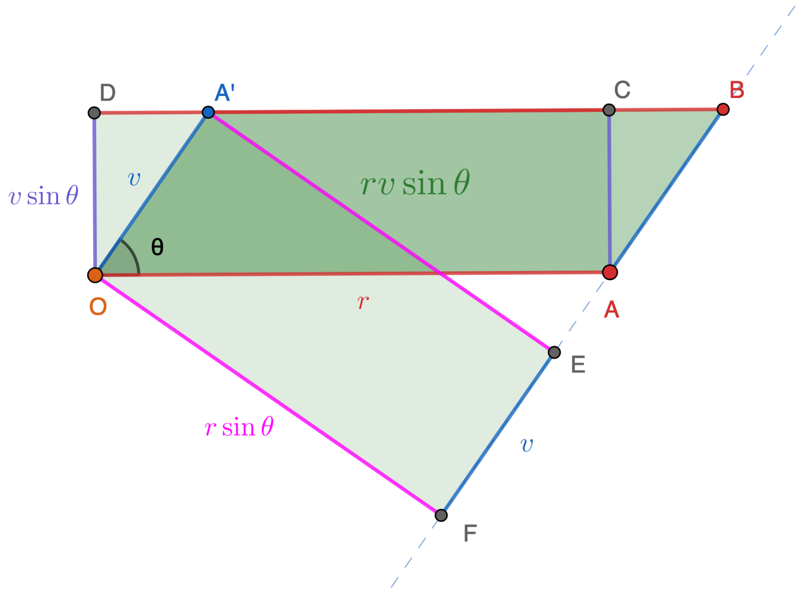


Figura 9: Legge delle distanze.

equivalenza fu per molto tempo oggetto di discussione.[11] Qui ci limitiamo a notare che mentre la legge delle aree chiama in causa l'*intervallo di tempo* e, dunque, assume significato solo se riferita a porzioni finite del moto, la legge delle distanze vale istantaneamente e ha un significato, ancora una volta, *intrinseco*, poiché coinvolge solo le lunghezze dei vettori posizione e velocità e l'angolo tra essi compreso. Lungi dall'essere intuitiva, la legge delle aree ha com'è noto la curiosa peculiarità di descrivere una cinematica senza parlare direttamente di *velocità*. La relazione (1) può invece essere riscritta nella forma

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_1 \sin\theta_1}{r_2 \sin\theta_2}, \tag{2}$$

che fissa le proporzioni tra le velocità in due punti qualunque del moto, *vincolandole* alla geometria del moto stesso. Notiamo inoltre che la (2) esprime tutta la cinematica racchiusa nella seconda legge di Keplero in una proporzione tra *numeri*, ed è dunque applicabile qualunque siano le unità di misura scelte nella descrizione del moto. Rispetto alle legge delle aree, la legge delle distanze appare in definitiva più eloquente, potente e finanche *naturale* se, come Hamilton, si adotta un approccio intrinseco nella descrizione del moto. Si può supporre che la prominenza data da Newton alla legge delle aree sia legata al significato *assoluto* attribuito al *tempo* misurato dall'area spazzata dai corpi in orbita.

Hamilton prosegue notando quanto segue:

> If, therefore, this constant area be given, and if either the hodograph or the orbit be known, the other of these two curves can be deduced, by a simple

[11] Per una discussione più ampia sulle diverse formulazioni della seconda legge e sulla confusione che ne è derivata si veda Aiton1969. In particolare, Aiton nota come il corollario citato sia stato posto in particolare evidenza solo nella terza edizione dei *Principia* probabilmente con l'obiettivo di sgombrare il campo dagli equivoci sorti intorno ai dubbi circa l'equivalenza delle due formulazioni.

> and uniform process, of which account the two curves themselves may be called *reciprocal hodographs.*

Proseguendo sulla via della geometrizzazione, Hamilton giunge a chiamare l'odografa e l'orbita *odografe reciproche*, a conferma del fatto che, in sostanza, le due curve codificano *le stesse informazioni* sul sistema, cioè quelle che ne descrivono il *moto.* Tale moto giace sul piano individuato dai vettori posizione e velocità e la costante area del parallelogramma da essi racchiuso determina univocamente tutta l'evoluzione del sistema. Hamilton sta tracciando quella strategia di risoluzione che diventerà poi comune nella formulazione della meccanica che porterà, non a caso, il suo nome: la ricerca di *integrali primi* del moto, ovvero quantità conservate che restringono lo spazio delle fasi accessibile al sistema in esame, cioè vincolano progressivamente la geometria alla cinematica e viceversa. Nel problema in esame, dato l'elevato grado di simmetria, un solo integrale primo è sufficiente, com'è noto, a determinare l'evoluzione del sistema.

Approssimando un generico elemento dell'odografa mediante il cerchio osculatore, che definisce il *raggio di curvatura* di una generica curva in un dato punto, Hamilton perviene attraverso una catena di proporzioni a una relazione che lega il raggio di curvatura dell'odografa alla forza agente sul corpo. Al medesimo risultato si giunge attraverso le seguenti considerazioni, svolte da Hamilton subito dopo:

> because the radius of curvature of the hodograph is equal to the element of that curve, divided by the angle between the tangents at its extremities, or (in the case of a central force) by the angle between two corresponding vectors of the orbit, which angle is equal to the double of the elementary area divided by the square of the distance (of the body from the centre of force), while the element of the hodograph has been seen to be equal to the [accelerating] force multiplied by the element of time, or multiplied by the same double element of orbital area, and divided by the constant of double areal velocity, therefore this radius of curvature of the hodograph must, for any central force, be equal to the force multiplied by the square of the distance, and divided by the double areal velocity.[12]

Se indichiamo con R_h il raggio di curvatura dell'odografa, con dS_h l'elemento dell'odografa e con $d\theta$ l'angolo spazzato dal vettore posizione e dalla tangente all'odografa nel medesimo intervallo, i passaggi descritti da Hamilton sono espressi dalle seguenti identità:

$$R_\mathrm{h} = \frac{dS_\mathrm{h}}{d\theta} = \frac{(F/m)d\lambda}{2\ dA/r^2} = \frac{(F/m)r^2}{2\dot{A}}, \tag{3}$$

essendo $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ l'area spazzata dal raggio vettore in un intervallo angolare $d\theta$ del moto del corpo rispetto al centro delle forze. Si ottiene dunque che

$$F = \frac{Mm}{r^2} \implies R_\mathrm{h} = \frac{M}{2\dot{A}} = cost, \tag{4}$$

[12] Ci sembra suggestivo legare questo risultato a quanto asserito dalla teoria della relatività generale di Einstein, che con un colpo di spugna elimina del tutto il concetto di *forza* riconducendolo alla *curvatura dello spaziotempo.* E se lo spaziotempo einsteiniano potesse essere riguardato come una sorta di *campo odografico*? Si tratta, per l'appunto, di vaghe suggestioni, che forse verranno approfondite in futuri lavori.

cioè, nelle parole di Hamilton:

> *with Newton's law of force* (supposed here to act towards a fixed centre) *the curvature of the hodograph is constant*: and, consequently, this curve, having been already seen to be plane, is now perceived to be a *circle* of which the radius is equal to the attracting mass divided by the constant double areal velocity of the orbit. Reciprocally, we see that *no other law* of force would conduct to the same result: so that the Newtonian law may be *characterized* as being the *Law of the Circular Hodograph*.

Si tratta, evidentemente, dello stesso risultato cruciale raggiunto da Feynman nella sua lezione, il cuore della sua dimostrazione: *qualunque moto che avvenga sotto l'effetto di una forza centrale che vari come l'inverso del quadrato della distanza è descritto da un'odografa circolare.* Ritroviamo, in particolare, il risultato evidenziato da Feynman per cui ad uguali settori *angolari* del moto rispetto al centro delle forze corrispondono uguali accelerazioni *lineari*, rappresentate da quelle che Hamilton chiama *corde odografiche*.

Nel resto dell'articolo sono dedotti dallo studio dell'odografa altri importanti risultati. In particolare, ricorrendo alla definizione di sezione conica basata sulla *retta direttrice*, Hamilton trova la forma generale dell'orbita associata ad un'odografa circolare:

> The *orbit*, therefore, [...] is always (with the law of the inverse square) a *conic section*, having the centre of force for a *focus* - a theorem which has indeed been known since the time of Newton, but has not perhaps been proved before from principles so very elementary.

L'unica orbita chiusa possibile è dunque un'ellisse avente il Sole in uno dei fuochi, che si identifica con quella costruita da Feynman e mostrata in Figura 7.

È significativo che anche Hamilton consideri la sua dimostrazione *very elementary*, ricorrendo allo stesso termine che userà Feynman due secoli dopo per descrivere il proprio modo di giungere al medesimo risultato. In effetti nell'accezione di Feynman la costruzione di Hamilton è, a ben vedere, ancora *più elementare* in quanto non richiede preliminarmente la conoscenza della terza legge di Keplero, utilizzata sia da Newton che da Feynman per dedurre la legge dell'inverso del quadrato e mai menzionata da Hamilton, che si limita qui a studiare il moto di un singolo corpo.[13]

Subito dopo aver dimostrato la *legge dell'odografa circolare* Hamilton fa l'osservazione seguente:

> The point on the hodograph which is the termination of any one vector of velocity may be called the *hodographic representative* of the moving body, and the foregoing principles show, that with a central force varying as the inverse square of the distance, this representative point describes, in any proposed interval of time, a *circular arc*, which contains the same number of degrees, minutes and seconds, as the angle contemporaneously described round the centre of force by the body itself in its orbit, or by the revolving

[13]Poco più avanti anche la terza legge viene dimostrata a partire dalla circolarità dell'odografa.

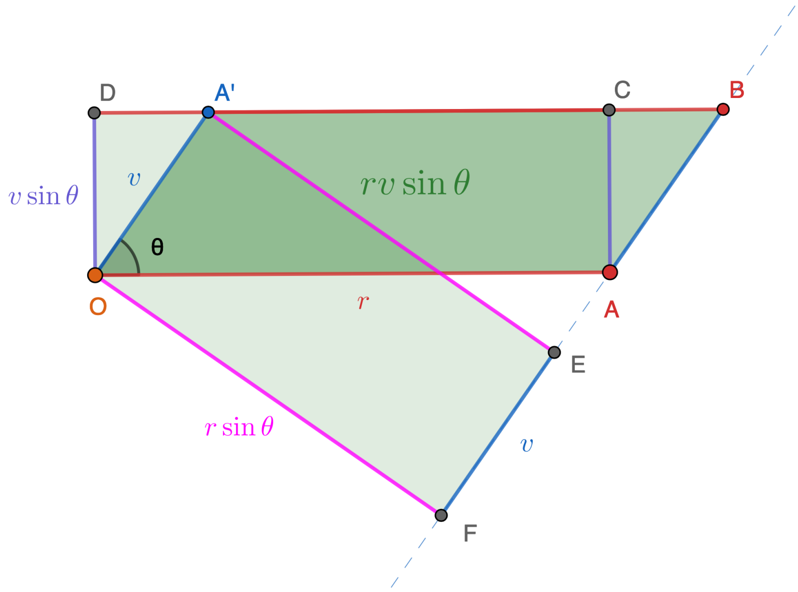


Figura 10: Costruzione di Feynman.

> vector of position; because, whatever that angle may be, an equal angle is described in the same time by the revolving tangent to the hodograph. Thus, with the law of Newton, *the angular motion of a body in its orbit is exactly represented, with all its variations, by the circular motion on the hodograph*; and this remarkable result may be accepted, perhaps, as an additional motive for the use of the new term which it is here proposed to introduce.

In altri termini *il moto circolare del rappresentante odografico del corpo coincide con la parte angolare del moto orbitale del corpo intorno al centro delle forze*. Sottolineiamo che dalla sola ipotesi di forza centrale deriva l'identità tra le *componenti angolari* dei moti del rappresentante odografico e del vettore posizione rispetto al centro delle forze. Nel caso specifico della legge dell'inverso del quadrato il risultato è particolarmente significativo, poiché essendo l'odografa una circonferenza l'*intero* moto del punto odografico, e non una sua componente, coincide con il moto apparente del corpo in orbita.

Si tratta, anche qui, dell'enunciato generale di una proprietà che abbiamo già riscontrato nel caso particolare trattato da Feynman: il punto p di Figura 7 è il *rappresentante odografico* del moto del pianeta P intorno al Sole C. Nel confrontare le parole di Hamilton con la costruzione mostrata in Figura 7 si ricordi che in quest'ultima il diagramma di velocità è stato precedentemente ruotato di 90°, sicchè la tangente all'odografa risulta in ogni punto *perpendicolare* al corrispondente vettore dell'orbita.[14]

Vi è anche un'altra e ben più significativa differenza tra la costruzione descritta da Hamilton e quella di Feynman mostrata in Figura 7, dove, lo ricordiamo, l'odografa ha estensione essenzialmente arbitraria. Nella trattazione di Hamilton,

[14]Essendo l'odografa circolare invariante sotto l'intero gruppo delle rotazioni nel piano, ciò che conta è che l'angolo formato tra tangente all'odografa e direzione Sole-pianeta sia lo stesso in tutti i punti dell'orbita.

al contrario, il raggio dell'odografa ha un valore ben definito, dipendente dal *valore assoluto* della velocità areolare del corpo in orbita rispetto al centro delle forze. Tale valore è tuttavia irrilevante nella costruzione di Feynman, che essendo interessato solo alla *forma* dell'orbita si limita ad assumere la *conservazione* della velocità areolare espressa dalla seconda legge di Keplero. È questo il motivo per cui, come abbiamo già sottolineato, le conclusioni cui giunge Feynman pertengono solo al moto *angolare* del corpo in orbita, e non al suo moto *spaziale*, cioè alla *forma* dell'orbita e non alla sua *estensione*. Rinunciare all'ipotesi che sia noto il valore della velocità areolare si rivela, tuttavia, un'intuizione geniale: è proprio in virtù di tale libertà che Feynman può costruire l'orbita *all'interno* della relativa odografa, semplificando enormemente la dimostrazione e la visualizzazione dei risultati. Questo passo è infatti preliminare all'applicazione del metodo delle tangenti, che identifica l'odografa come *circonferenza direttrice* dell'orbita riscalata, un risultato che non compare nel lavoro originale di Hamilton.

Notiamo tuttavia che nella costruzione di Feynman il raggio dell'odografa conserva un significato *relativo*, poiché la sua lunghezza coincide geometricamente con un particolare valore assunto dalla velocità del corpo in orbita. Si noti che nel limite $e = 0$ l'orbita diventa una circonferenza, il cui raggio è pari alla metà del raggio dell'odografa. Di conseguenza il raggio dell'odografa si può considerare proporzionale alla cosiddetta *velocità orbitale media*, cioè la velocità di un corpo fittizio che compia un moto circolare uniforme intorno al centro delle forze impiegando lo stesso tempo del corpo reale in orbita. In altri termini, la soluzione circolare del problema a due corpi identifica il cosiddetto *moto (siderale) medio*, che può essere utilmente essere utilizzato come unità di misura delle velocità.

Al netto delle differenze suddette, in Figura 7 è evidente la circostanza descritta da Hamilton: *se vale la legge dell'inverso del quadrato, il moto angolare di P rispetto a C coincide con il moto circolare di p intorno allo stesso punto C*, cioè, in altri termini, *centro delle forze, corpo in orbita e rappresentante odografico sono sempre allineati.* In formule, $\omega_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{P}}$, indicando con ω la velocità angolare osservabile dal centro delle forze.

L'utilità non solo pedagogica dell'approccio di Feynman si può apprezzare applicando la costruzione mostrata in Figura 7 al sistema Terra-Luna, con la Terra ad assumere ovviamente il ruolo di centro immobile delle forze. L'odografa lunare è una circonferenza centrata sulla Terra e il moto circolare non uniforme del rappresentante odografico si identifica con il *moto apparente della Luna sullo sfondo delle stelle fisse*, cioè l'unico moto realmente accessibile all'osservazione.