

Concetti e competenze matematiche nella modellizzazione di fenomeni fisici. La multi-rappresentazione nello studio del moto.

Emilio Balzano

Dipartimento di Scienze Fisiche dell'Università degli Studi di Napoli Federico II
balzano@na.infn.it

“ ... non può imparare a dominare la geografia della regione uno che percorra un paese così lentamente da dimenticarne una parte quando arriva all'altra ”

(L. Wittgenstein, *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*)

1. L'insegnamento della matematica e della fisica

Il mancato riconoscimento, nella pratica didattica, del legame esistente fra comprensione matematica e comprensione fisica è, secondo noi, all'origine di alcune delle difficoltà di apprendimento-insegnamento nelle due discipline. Eppure tale legame, esplicitato nel rapporto tra formalizzazione matematica e modellizzazione fisica, è oggi riconosciuta nelle proposte internazionali più avanzate sulla riorganizzazione del curriculum di matematica e scienze. Non è un caso. Dopo anni di proposte fallimentari che nei due campi hanno da un lato privilegiato l'insegnamento precoce di strutture astratte non “ancorate” alle competenze di base anche innate (in matematica) e dall'altro privilegiato un insegnamento “semplificato” senza un esplicito riferimento alla struttura formale delle discipline (in scienze e in particolare in fisica) appare oggi chiaro che tale separatezza non aiuta a comprendere soprattutto perché non valorizza la nostra naturale tendenza (a tutte le età) a rapportarci alla realtà attraverso complesse strutture mentali e strumenti culturali. Tali strutture fanno riferimento a rappresentazioni astratte che si sviluppano, già nel neonato, con il linguaggio. E le capacità linguistiche si sviluppano con la cosiddetta “sincronia interattiva”: esplorazione del mondo fisico (con numeri e geometria) e linguaggio (con metafore su numeri e geometria) sono fortemente interconnessi. Non sarà forse che proprio questo non esplicito riferimento al complesso gioco cognitivo tra lingua, matematica e fisica impoverisca le ultime due discipline?¹ Non si finisce così per spogliarle dei loro conaturati strumenti metacognitivi, rendendo, soprattutto nei più grandi, poco avvincente e motivante il gioco della conoscenza? E dal punto di vista dell'apprendimento non dovrebbe spaventarci la complessità di queste relazioni. Non è forse vero che siamo soddisfatti (sono i ragazzi a tutte le età a dirlo) quando impariamo qualcosa di “difficile”? Ovviamente ciò non vuol dire che dal punto di vista dell'insegnamento e della mediazione didattica questa integrazione sia semplice. I modelli di insegnamento (con cui ci siamo tra l'altro formati) fanno esplicito riferimento ad una separatezza tra matematica e fisica e molto lavoro deve essere fatto, in tal senso, in primo luogo nella formazione iniziale e continua degli insegnanti. Nella proposta presentata in questo lavoro non si intende introdurre concetti matematici con esempi fisici, piuttosto si cerca di riconoscere, nella presentazione di esperienze di fisica (in particolare di cinematica) la possibilità di riconoscere l'unitarietà dei processi cognitivi sottesi alla comprensione dei concetti e delle strutture “autonome” ma “correlate” delle due discipline. Questa presentazione fa riferimento agli interventi di inquadramento di Guidoni, Tortora, Iannece ai quali si rinvia in particolare per approfondimenti sui modelli di apprendimento. Alcuni degli argomenti li trattati saranno qui esposti in modo inevitabilmente sintetico e talvolta presentati come assunzioni..

¹ La matematica non è la realtà. Anche la fisica non coincide con il mondo fisico! Alcune posizioni presenti nell'ambito della ricerca in didattica della matematica: “Math is not for reality- Physics is”, (Shternberg & Yerushalmy, 2005) sembrano non cogliere la complessità esistente in fisica nel legame tra realtà, modello fisico-matematico e teoria.

Alcune premesse

L'insegnamento tradizionale della matematica punta tutto sullo sviluppo del pensiero logico-deduttivo (ovviamente di fondamentale importanza), quello delle scienze in generale su quello lineare-causale (anche questo fondamentale). Ma la matematica può aiutare a sviluppare anche i pensieri logico-associativo, quello reticolare, quello analogico immaginativo, quello simbolico... La **correlazione** e la **covarianza** costituiscono strategie cognitive molto potenti e negli esempi si cercherà di enfatizzare il ruolo della **multi-rappresentazione** nella costruzione di concetti e competenze: "una caratteristica delle idee importanti è proprio che si prestano ad essere rappresentate in più modi...che possano essere racchiuse in una molteplicità di *modelli linguistici*...Un segno distintivo dell'esperto è la sua capacità di trovare una varietà di percorsi di avvicinamento all'idea principale, nonché di saper valutare nuove interpretazioni possibili ". (Gardner, 1999)

Nella nostra esperienza è fondamentale includere nella costruzione/condivisione di concetti, esperienze fisiche, artistiche...di interesse quotidiano. L'uso di vari registri (verbale, visivo, motorio, interpersonale, ecc.) consente di attivare potenzialità diverse con maggiori probabilità di coinvolgere chi apprende e di favorire una memorizzazione stabile. La memoria non è una funzione unitaria. Esistono più memorie, una operativa a breve termine, una serbatoio a lungo termine, una semantica, ecc. (Baddeley, 1995) ciascuna delle quali attiva diverse aree del nostro cervello. Le emozioni, non sono un *lusso*, giocano un ruolo determinante nella loro interconnessione e quindi nei processi di apprendimento (Goleman, 1998) ai quali partecipiamo con tutto il nostro corpo "il corpo fornisce al cervello più che un puro sostegno e modulazione: esso fornisce la materia di base per le rappresentazioni mentali". (Damasio, 1995). Nelle esperienze che presentiamo discutiamo sulla necessità di coinvolgere sugli studenti sul piano percettivo-motorio e su quello emotivo creando le condizioni per attivare diverse potenzialità valorizzando stili e approcci attraverso la multi-rappresentazione.

La matematica è un modo di ragionare con una consistenza interna. Ma il rigore, i criteri di coerenza, la consistenza interna e l'eleganza che possono caratterizzare risultati formali non possono essere costruiti a priori, insegnanti prima in modo esemplare. Piuttosto sono legate allo sviluppo di competenze logico-linguistiche che occorre costruire con metodo con **strategie metacognitive**. La matematica è un linguaggio che usa in modo appropriato, parole, simboli, strumenti. Gli aspetti linguistici e non solo i risultati numerici sono cruciali per cogliere il senso del ragionamento. Le parole del linguaggio naturale sono metafore che danno significato alle parole della matematica e della fisica. E le parole acquistano significato con esperienze condivise. Nelle proposte didattiche diventa determinante riflettere sul lavoro di mediazione dell'insegnante e sulla progettazione di ambienti di apprendimento che permettano lo scambio e la condivisione di esperienze e significati.

Viviamo in un mondo con oggetti discreti e mobili. La nostra mente si è evoluta in modo da consentirci di utilizzare, anche senza studiare, semplici strumenti di calcolo. Il cervello umano possiede un meccanismo di comprensione delle quantità numeriche, ereditato dal mondo animale, che ci guida nell'apprendimento della matematica. Gli elementi di base della geometria (punto, retta, piano...) sono innati. "la geometria di base, così come l'aritmetica, è un costituente universale della mente umana" (Dehaene, 2000; Dehaene et al. 2005). Tuttavia il nostro cervello non si è evoluto in modo da farci fare *naturalmente* calcoli formali. Per farli occorre certamente esercizio ma è necessario attrezzarsi con strategie che valorizzino ciò che sappiamo già fare: "Il cervello del bambino non è una spugna, è un organo già strutturato che impara soltanto ciò che è in risonanza con le sue conoscenze anteriori". (Dehaene, 2000)

Esistono diversi ottimi esempi/sperimentazioni su come costruire competenze matematiche integrando gioco, analisi qualitativa, percezione e senso estetico valorizzando esperienze comuni. Esistono anche ottime proposte di organizzazione del curriculum di matematica e di quello di fisica. Mancano però a nostro avviso proposte organiche e coerenti di insegnamento integrato di matematica e scienze e in particolare di matematica e fisica.

2. La modellizzazione fisica e matematica

Dal punto di vista didattico potrebbe essere molto utile coinvolgere studenti e insegnanti sul rapporto tra matematica, fisica e mondo fisico. Riflessioni di questo tipo, di carattere epistemologico e storico che riguardano i fondamenti (lo statuto, gli obiettivi, i metodi ecc.) delle due discipline potrebbero svolgere un ruolo decisivo nell'affrontare alcune delle difficoltà di insegnamento e apprendimento legate a fraintendimenti e incomprensioni sul significato da dare a fatti, evidenze, interpretazioni e dimostrazioni. E tali riflessioni dovrebbero a nostro avviso coinvolgere gli studenti non tanto in attività di approfondimento ma soprattutto nelle attività di modellizzazione (matematica e fisica) sia in aula sia in laboratorio. Il termine "modello" è usato in modo esteso in contesti molto diversi, tuttavia anche nello stesso ambito della modellizzazione matematica e fisica le definizioni e le relative classificazioni acquistano significati talmente variegati che a volte diventa difficile intendersi. Non è difficile tuttavia riconoscere che al centro del dibattito c'è spesso proprio il rapporto tra fisica e matematica.

Secondo Thom ad esempio i modelli offerti dalla fisica contemporanea risultano del tutto insufficienti al comprendere a causa di un ostinato riduzionismo ed un eccessivo sperimentalismo che si traduce in una povertà di teorizzazione: "la fisica attuale ci offre una visione del mondo del tutto compatibile con il *panta rei*, il mobilismo universale: l'universo non è che un brodo di elettroni, protoni, fotoni,...tutte entità dalle proprietà mal definite in perpetua interazione. Come può questo brodo organizzarsi alla nostra scala, in un mondo relativamente stabile e coerente, molto lontano dal caos quantistico e meccanicistico che la teoria suggerisce?". (Thom 1985). Per Thom è decisivo riconoscere un'importanza fondamentale alla matematica capace di costruire intelligibilità e conoscenza. La matematica è capace di entrare "in risonanza" con il mondo fisico soprattutto perché esso è organizzato in *forme* che sono essenzialmente *strutture matematiche*. L'oggetto di un'osservazione, di un esperimento, anche se talvolta ciò ci sfugge, ha una sua struttura e grazie alla modellizzazione fisica e matematica riusciamo a rappresentarcelo in modo più o meno soddisfacente. Senza che si perda il carattere di scientificità e rigore quindi non dovremmo ridurre le scienze all'ambito sperimentale e quindi solo al quantitativo e al predittivo ma dovremmo valorizzare l'aspetto descrittivo e qualitativo al fine di privilegiarne la capacità di rendere intelligibili gli oggetti e di teorizzare. E la matematica stessa può prestarsi ad un uso qualitativo e descrittivo. Non è questa la sede per dibattere su temi che riguardano la complessità, il determinismo, il rapporto tra fisica teorica e matematica ma riteniamo che riflessioni di questo tipo possano offrire diversi spunti per esplorare e progettare percorsi didattici che integrino matematica e fisica. Dal punto di vista dell'apprendimento-insegnamento il riconoscimento della complessità richiede l'abbandono di modelli lineari di input-output e di causa-effetto. Il conoscere è un sistema complesso, gli oggetti della conoscenza (concetti) si strutturano in modo organizzato, non sono separabili dal contesto e sono in relazione dinamica con altri oggetti (concetti). Quindi il conoscere, anche un singolo concetto (ad esempio in matematica quello di funzione) implica talvolta distinguere, separare, esercitarsi su singoli fatti ma anche e soprattutto correlare, imparare a leggere covarianze, insomma a riconoscere il contesto e il sistema di relazioni/concetti che costruiscono il concetto stesso.

Nel campo della ricerca didattica particolare attenzione è dedicata alla possibilità di utilizzare le nuove tecnologie informatiche (tools, multimedialità, didattica in rete, ecc.) per costruire competenze articolate (disciplinari e trasversali). Nelle proposte più interessanti appare chiaro che, lungi dall'essere meramente dei sussidi, queste nuove tecnologie, non sono neutre. Con le potenzialità, i vincoli e i limiti che sono loro propri, consentono di costruire abilità e competenze diverse e, parallelamente, contribuiscono alla forma del pensiero e alla produzione dei concetti matematici e fisici. Le diverse nuove applicazioni, i diversi sistemi, non sono quindi intercambiabili. Gli obiettivi didattici che si possono raggiungere sono potenzialmente diversi ed essi si configurano come luoghi-sistemi in cui si sviluppano nuovi modi apprendere e di comunicare, nuovi laboratori di conoscenze ed esperienze in cui la costruzione di contenuti disciplinari specifici e il processo di comunicazione e di indagine non necessariamente si identificano. Così nei due diversi ambiti (didattica della fisica e della matematica) si riflette sul significato e sul ruolo di tali sistemi. Nell'ambito della didattica della matematica ci sono ricercatori che tendono a distinguere tra *modello didattico* di un concetto matematico e *modello matematico* (Shternberg & Yerushalmy, 2005). Nell'ambito della didattica della fisica l'enfasi è sul processo di modellizzazione che porta a studiare-costruire modelli in ambienti di modellizzazione-simulazione (virtuali) e in ambienti di acquisizione automatica di dati sperimentali.² (Balzano, 2006) In ogni caso ci sembra che in una proposta di insegnamento integrato di matematica e fisica³ le finalità didattiche dell'utilizzo degli ambienti di modellizzazione, o comunque delle nuove tecnologie, potrebbero essere, sinteticamente:

- a) usare simboli ed operazioni con oggetti/concetti matematici che diventano via via familiari per esplorarne le proprietà e per aiutare a sviluppare ragionamenti formali;
- b) esplorare e costruire modelli fisici e matematici studiando comportamenti ed evoluzione di sistemi e fenomeni (anche complessi) legando i risultati che si ottengono alle scelte fatte (su cosa si vuole vedere!);
- c) usare in modo critico strumenti e ambienti di modellizzazione impadronendosi dei principi di funzionamento, dei "motori" che utilizza, ecc. al fine di riconoscerne potenzialità, vincoli e limiti legati alla matematica, alla fisica e alla tecnologia (software e hardware con un giusto equilibrio).

E ci sembra che tali obiettivi possano essere raggiunti coinvolgendo studenti e insegnanti proprio sul significato di modello matematico. Tra le tante definizioni di modello matematico (si veda l'intervento di R. Tortora), risulta particolarmente significativa dal punto di vista della mediazione didattica: **"Il modello matematico è la rappresentazione formale di idee o conoscenze relative a un fenomeno"** (Malinvaud 1964). Ciò significa che a partire dalla realtà di un fenomeno (sempre relativamente complessa) *"la natura sembra essere fatta in modo che le cose più importanti del mondo reale appaiono essere conseguenze complicate e accidentali di una molteplicità di leggi naturali"* (Feynman 1971) ciò che occorre fare è selezionare fatti e aspetti che riteniamo fondamentali (idee e conoscenze) per poi tradurli in formule ed equazioni. Ma occorre insistere sul fatto che si tratta di idee, di pregiudizi che si collegano a situazioni che sappiamo trattare e a informazioni e conoscenze sul fenomeno che dipendono dal metodo, dalle tecniche sperimentali ecc. "Le idee che entrano in gioco sono in primo luogo relative a ciò che si vuole descrivere... il fenomeno non contiene la legge... la traduzione matematica non è immediata" (Israel 2002). L'attività di modellizzazione diventa quindi un momento cruciale particolarmente ricco, nel quale è possibile costruire competenze e conoscenze, un processo nel quale occorre condividere idee, scelte, metodi di costruzione, di verifica e di plausibilità.

² Nei primi anni dell'Università e nella formazione dei docenti la modellizzazione può avvalersi di strumenti di calcolo numerico e di statistica anche per la ricerca di curve interpolanti, il confronto tra modelli, test di ipotesi. (www.les.unina.it, sette percorsi di fisica, sceneggiature)

³ Non si intende qui proporre l'insegnamento di un'unica disciplina. Piuttosto si intende sottolineare la necessità di sviluppare-sperimentare proposte didattiche che tengano conto, in modo coerente, dello sviluppo intrecciato di concetti e competenze in matematica e fisica.

Ci sembra tuttavia che tale ricchezza-complessità sia talvolta poco avvertita proprio nell'ambito della ricerca didattica in cui, pur di condividere approcci e formati che sembrano funzionare in alcuni contesti, si cerca di schematizzare in passi preordinati (ad esempio previsione, indagine, verifica, ecc.) e in cicli da reiterare, un insieme di attività fortemente interrelate e difficilmente separabili in modo standard. Ci sembra invece più interessante suggerire un insieme di risorse e strategie a cui fare riferimento in modo flessibile dando la possibilità di analizzare come casi esemplari sperimentazioni che sono state svolte con successo.

Se riusciamo a condividere con gli studenti il fatto che l'attività di modellizzazione diventa un vero e proprio atto conoscitivo **“Lo scopo stesso dell'attività cognitiva è di simulare il reale percepito costruendo un'analogia mentale (la rappresentazione) e di simulare il reale concepito elaborando un “analogon” ideale (la teoria)”** (Morin, 1986) appaiono forse più chiare e interessanti le scelte fatte. La scelta arbitraria di variabili che caratterizzano gli "oggetti formali" (e le loro reciproche relazioni) prodotti in questa rappresentazione comporta un "taglio" realizzato dal nostro sguardo, una proiezione che comprende alcuni aspetti dei sistemi che ci interessano, ne esclude altri. E il “taglio” riguarda anche i modi di indagare e descrivere⁴: potrà essere privilegiato il punto di vista geometrico, piuttosto che quello algebrico, si potrà lavorare per conservazione-compensazione piuttosto che per equilibrio, con un approccio integrale piuttosto che differenziale, ecc. E la scelta-condivisione delle diverse strategie comporterà il condividere significati di operazioni e concetti di base della matematica e della fisica. Per lo studio del moto che sarà presentato nei prossimi paragrafi, la stessa **struttura dello spazio-tempo** a cui ci riferiamo è soggetta a questo grado di arbitrarietà (si può distinguere tra uno **spazio-tempo discreto e uno continuo**). Modelli studiati nei due diversi sistemi (discreto-continuo) possono essere formalmente ricondotti l'uno all'altro attraverso le operazioni di passaggio al limite e di discretizzazione. Si tratta tuttavia di operazioni che richiedono la comprensione di delicati e non sempre condivisi concetti matematici e fisici. E diventa non trascurabile il fatto che l'evoluzione dinamica dei due sistemi così ottenuti porterebbe poi a risultati diversi in un tempo discreto e in uno continuo: i due modelli non sono quindi le semplici riscritture di un unico modello ma distinti modi di studiare un fenomeno.

3. Il movimento e la costruzione dei concetti matematici e fisici

Lo studio del moto rappresenta un ambito particolarmente fecondo per riflettere sulla possibilità di costruire in modo integrato competenze nel campo della fisica e della matematica. Del resto concetti cruciali di matematica e fisica (geometria, analisi, fisica classica e moderna) sono stati storicamente sviluppati per lo studio del moto e poi decontestualizzati e generalizzati, conservando con alterazioni semantiche significati e concetti che evocano il moto. Ma non è tanto la ricostruzione storica che qui ci interessa sviluppare. Piuttosto ci interessa sottolineare la base “biologica” ed evolutiva della percezione e dello studio del movimento (si veda l'intervento di Guidoni) per cercare di capire come sviluppare una didattica della matematica e della fisica che aiuti le persone a comprendere innanzitutto facendo leva su ciò che naturalmente sappiamo e sappiamo fare già da piccoli. Solo in questo modo la mediazione didattica può diventare efficace: la rivisitazione cognitiva, l'elaborazione condivisa delle rappresentazioni mentali “naturali” del movimento controllate e descritte con concetti fisico-matematici via via più sofisticati permetteranno di costruire quelle competenze formali fondamentali per l'educazione scientifica. Sinteticamente ci sembra che le considerazioni su cui riflettere per progettare percorsi didattici siano quelle che seguono.

⁴ Più in generale, dal punto di vista dell'apprendimento di concetti e l'acquisizione di competenze, andrebbe poi sottolineato il diverso modo di ragionare per cardinalità e per ordinalità, con un pensiero sintetico-visivo e con quello verbale-sequenziale (si veda l'intervento di P. Guidoni)

- a) Il movimento dà forma al linguaggio (anche negli adulti si pensi al gesticolare...) e il lattante apprende dalla coerenza delle azioni e dei movimenti i principi di causalità e di sequenzialità che sono alla base della struttura del linguaggio;
- b) gli studi sulla “permanenza dell’oggetto” con i neonati mostrano che esiste anche in età precoce uno schema della realtà che include la posizione (per oggetti fermi) e la traiettoria (per oggetti in movimento). Questa capacità spaziale predomina all’inizio su quella “figurativa”, solo dopo i 12-15 mesi il neonato si stupisce della sostituzione di un oggetto;
- c) la traiettoria ha quindi una materialità (e un significato) particolare per noi. Ovviamente ciò non avviene per le leggi orarie, grafici di velocità e accelerazioni che richiedono lo sviluppo di concetti e quindi del linguaggio fisico-matematico. D’altro canto questa materialità che associamo alle curve è ben presente nel linguaggio della matematica (la pendenza, la ripidità, ecc.) nelle operazioni che facciamo (nel disegnare, la curva è la traiettoria...). Ed è interessante notare che queste “interferenze” possono presentarsi come difficoltà “percettive” quando chiediamo ad una persona di riprodurre un grafico cinematico con *salite e discese* (allontanamenti e avvicinamenti dal sensore di moto⁵) - è infatti istintivo saltare ... poi si capisce che la curva non è un traiettoria - o nell’interpretare figure da libri di testo o da software (Carlson, 1988; Monk, 1992; Monk & Nemirovsky, 1994)

Come aiutare le persone a comprendere? Come valorizzare la naturale familiarità che abbiamo con il movimento? Spunti e suggerimenti dalla ricerca didattica (della fisica e della matematica) possono ovviamente essere decisivi per migliorare il lavoro dell’insegnante. Soprattutto quando fanno riferimento a sperimentazioni di nuove strategie. Di minore interesse al nostro avviso risultano i lavori sulle difficoltà di apprendimento-insegnamento che fanno scarso riferimento ai modi per superarle. In generale occorre rilevare che ci sono poche proposte organiche, supportate dal lavoro di ricerca didattica, su come organizzare percorsi verticali che sviluppino con continuità e in modo integrato (fisica e matematica) lo studio del moto.

E diverse proposte risentono di un’impostazione standard che certamente non aiuta a dare significati a concetti così importanti. Una didattica miope pretende infatti di introdurre il moto attraverso le classificazioni standard che risentono della gradualità nello sviluppo del formalismo. Il percorso tipico (si pensi ai nostri Licei) è: moto rettilineo, moto rettilineo uniforme, moto rettilineo uniformemente accelerato, moto vario ... moto in due dimensioni (parabolico, circolare uniforme). Ed è chiara la coerenza del percorso dal punto di vista dei concetti concatenati che si intendono presentare (grandezze vettoriali, composizione del moto, legame con le forze, ecc.). L’errore che a nostro avviso si commette è quello di presentare, così come per altri ambiti, una fenomenologia sistematizzata che permetta di costruire mattone su mattone edifici che si reggono. Ma come è noto i nostri modi di apprendere difficilmente possono aderire alle stesse sequenze basate su una coerenza che può essere condivisa solo quando abbiamo capito quali sono le regole del gioco. La comprensione dei concetti matematici e fisici che intervengono nello studio del moto è un processo e non un atto immediato. Ci sembra quindi naturale partire, con un giusto equilibrio tra qualitativo e quantitativo, da moti più complessi e familiari. Dai moti su traiettorie prestabilite che si sviluppano nello spazio, dalla velocità che ci è familiare (scalare e senza segno)... Sviluppare modi via via più precisi per caratterizzare i diversi moti condividendo significati e operazioni matematiche e fisiche. Correlare rappresentazioni diverse per lo stesso moto e poi rivisitare i moti studiati in modo da inquadrarli in uno schema teorico coerente.

Negli esempi che presentiamo nel paragrafo 4. cercheremo di offrire alcuni spunti a partire da esperienze che svolgiamo da anni con studenti e insegnanti di tutti i livelli scolari. Faremo in particolare riferimento all’uso di apparati che utilizzano in modo innovativo le nuove tecnologie. Tuttavia nella nostra esperienza le tecnologie utilizzate, sicuramente utili nel lavoro di formazione

⁵ Ad esempio con sistemi computer-sonar o computer-telecamera che permettono di studiare il moto in tempo reale

degli insegnanti per condividere in modo efficace strategie innovative, non sono strettamente indispensabili per il lavoro con gli alunni. Senza negare l'indubbio valore dell'esperienza diretta, le attività didattiche sviluppate anche con tecnologie tradizionali possono infatti, a nostro avviso, "accogliere" diversi "suggerimenti" che ci vengono dall'aver sperimentato come docenti e ricercatori, nuove strategie in ambienti di apprendimento basati sulle nuove tecnologie.

3.1 Lo studio del moto in tempo reale

Diversi meccanismi e apparati (che usano punte scriventi, leve ottiche, foto stroboscopiche... trasduttori interfacciati a computer)⁶ permettono di registrare il moto (in tempo reale e in differita) dando la possibilità di analizzare traiettorie, misurare velocità, ecc. anche in situazioni in cui la presa dati manuale risulta impossibile. In particolare negli ultimi anni, grazie ad un'elettronica a basso costo si sono diffusi sistemi didattici basati su trasduttori che, interfacciati a un computer, permettono di visualizzare, tabelle, grafici e traiettorie in tempo reale di persone e oggetti in moto. In generale, lo studio del moto con sistemi di acquisizione on-line offre diversi vantaggi. Le potenzialità riguardano le possibilità di: a) studiare fenomeni che si svolgono in brevi intervalli di tempo; b) ridurre i tempi di acquisizione e concentrarsi sull'analisi dell'esperienza; c) analizzare fenomeni di interesse per i ragazzi che riguardano spesso esperienze quotidiane e non solo esperimenti tradizionali di laboratorio; d) aiutare nel processo di formalizzazione, correlando l'osservazione del fenomeno ai diversi modi per rappresentare simbolicamente una grandezza; e) progettare attività orientate alla modellizzazione dei fenomeni studiati; f) ottenere grande flessibilità nell'uso del sistema, che permette attività che vanno dalle dimostrazioni interattive condotte dal docente con esperienze già predisposte (ad esempio per affrontare difficoltà di apprendimento di concetti chiave) alla realizzazione di esperimenti che coinvolgono gli studenti su più piani: nella configurazione degli apparati di rivelazione, nella gestione dell'acquisizione, nell'analisi dei dati, ecc.

Grazie alla diffusione di nuove tecnologie a basso costo, si stanno diffondendo sistemi per lo studio del moto che integrano l'uso di trasduttori e di telecamere, con l'obiettivo di poter arricchire l'analisi con la correlazione di aspetti diversi (immagini di persone e oggetti, traiettorie, grafici cinematica, ecc.).

4. Esempi

Gli esempi che qui presentiamo in forma inevitabilmente sintetica fanno riferimento a sperimentazioni di percorsi didattici sul movimento. I percorsi (sviluppati anche in relazione ai legami con forza ed energia) sono stati progettati⁷ (Balzano, 2001) come elementi di curricolo verticale con l'idea chiave di integrare i sistemi per lo studio del moto in tempo reale in attività di laboratorio (anche povero e tradizionale) finalizzate a correlare la percezione e l'esperienza motoria con la modellizzazione fisica e matematica. Le sperimentazioni e gli esempi presentati hanno finora coinvolto:

- bambini e ragazzi di scuole di tutti i livelli (dalla scuola dell'infanzia fino agli ultimi anni della secondaria superiore);
-

⁶ L'analisi del principio di funzionamento di apparati tradizionali e di "nuova generazione" per la registrazione del moto (analogici e digitali), se ben integrata nello studio dei risultati sperimentali, costituisce a nostro avviso, un'opportunità didattica non solo per acquisire senso critico nell'uso delle tecnologie. Infatti può essere utile ma anche per cogliere il senso delle trasduzioni e delle definizioni operative delle grandezze fisiche e per comprendere il legame tra discreto e continuo, il significato di interpolazione e di estrapolazione, ecc.

⁷ I percorsi sono stati progettati in alcuni progetti nazionali di ricerca e di sperimentazione didattica. In particolare nel Progetto LES www.les.unina.it (coordinatore E. Balzano), nei Progetti PRIN (SeCiF, FIS21 coordinati da P. Guidoni) www.secif.unimi.it

- studenti dei primi anni dell'università dei corsi di laurea in fisica e in matematica;
 - visitatori a Città della Scienza;
 - insegnanti nella formazione iniziale (scuole di specializzazione all'insegnamento) e in servizio (scuole di perfezionamento in didattica della matematica e della fisica).
-

Alcuni dei materiali suggeriti sono stati sviluppati in lavori di tesi nei corsi di laurea in matematica e in fisica.

Le esperienze presentate in questo lavoro vogliono offrire esempi di costruzione e condivisione sinergiche di concetti e competenze in fisica e matematica.

4.1 Moto di persone, immagini, traiettorie e leggi orarie

Nelle aree espositive di Città della Scienza di Napoli sono presenti due exhibit sullo studio del moto che hanno coinvolto in modo efficace migliaia di visitatori e in particolare studenti in visita con la loro classe. Con i due exhibit è possibile analizzare il moto di una persona ripresa da una telecamera in una dimensione (per lo studio dell'equilibrio) e in due dimensioni (con l'analisi di grafici temporali dei moti componenti) attraverso l'analisi di grafici, traiettorie e immagini-scia della persona costruiti in tempo reale su un grande schermo. I due exhibit utilizzano la stessa tecnologia di base⁸ (telecamera interfacciata a un computer) ed hanno come obiettivo il coinvolgimento emotivo del visitatore-sperimentatore attraverso un feedback multimediale "esteticamente risonante" che può innescare la voglia di approfondire gli aspetti matematici e fisici del movimento. Il valore della risonanza cognitiva delle esperienze che si possono realizzare con questo sistema è testimoniata dalle applicazioni in campo artistico (danza, trapezio, ecc.) e riabilitativo (controllo della postura, deficit senso-motorio del Parkinson, ecc.)⁹. Dal punto di vista dell'apprendimento dei concetti matematici e fisici l'ambiente che si realizza coinvolgendo un gruppo di visitatori o un gruppo classe diventa particolarmente stimolante e ricco di opportunità. Il movimento di una persona può essere analizzato attraverso i suoi aspetti ritmici evidenziazione delle sequenze di movimento e di pausa e delle loro durate relative. Il movimento può essere fluido o impulsivo e la visualizzazione in tempo reale di figure e grafici costruiti con il proprio movimento permette di dare significato a "forme" che possono essere analizzate dal punto di vista fisico e matematico. Ciò può aiutare a sviluppare competenze sia nel valutare analiticamente sequenze di movimento sia a valutarne globalmente le caratteristiche imparando a distinguere tra diversi grafici e figure realizzati con moti aventi caratteristiche diverse.

Le attività sperimentate in Città della Scienza lavorando con i due exhibit sono state finora:

- con i bambini (materna ed elementare) si è lavorato essenzialmente sulle forme delle traiettorie (in due dimensioni) e delle leggi orarie (per il moto in una dimensione). Sulle traiettorie le esperienze sono quelle tipiche del "Logo". Disegnando con il proprio corpo le traiettorie a terra e contemporaneamente sul grande schermo i bambini hanno incominciato a familiarizzare con figure anche belle (circonferenze, ellissi, spirali, ecc. Particolarmente interessante è risultata nella nostra

⁸ I due exhibit sono stati realizzati in collaborazione con il Dipartimento di Informatica e Sistemistica dell'Università di Genova ed utilizzano la piattaforma EyesWeb (www.infomus.dist.unige.it/EywIndex.html). Con la stessa piattaforma è stata realizzata una versione per gli esperimenti in remoto e per lo sviluppo di esperimenti a casa e a scuola con l'utilizzo di webcam a basso costo.

⁹ Nell'ambito del progetto IST dell'Unione Europea denominato CARE-HERE, è stato messo a punto un sistema basato sulla piattaforma EyesWeb per il trattamento di deficit sensorimotori in pazienti parkinsoniani.

esperienza la possibilità di coinvolgere i bambini in una valutazione qualitativa dei grafici delle leggi orarie per il moto in una dimensione. Ad esempio per realizzare “montagne” più o meno “alte” allontanandosi e avvicinandosi alla telecamera; per realizzare più “montagne” più o meno ravvicinate andando più volte avanti e indietro nello stesso intervallo di tempo; per realizzare forme particolari, ad esempio “U” e “V” (anche capovolte) per controllare le inversioni di moto sulla stessa traiettoria, ecc.

- con i ragazzi delle scuole medie le stesse attività sono state supportate (per i moti in una dimensione) da una prima lettura dei grafici con una valutazione delle distanze in gioco e delle velocità medie. Per il moto in due dimensioni si è incominciato a lavorare su una correlazione qualitativa tra traiettoria e grafici dei moti componenti. Dopo una prima fase di esplorazione qualitativa si è lavorato sulle coordinate cartesiane e sulla ricostruzione geometrica delle traiettorie proiettate sui due assi;

- con i ragazzi delle medie superiori il lavoro ha riguardato la correlazione tra grafici temporali nel moto in una dimensione e la formulazione analitica di alcune traiettorie per il moto in due dimensioni

- con gli insegnanti si è lavorato sia sugli aspetti disciplinari sia sulla gestione didattica delle esperienze proposte;

- con visitatori in eventi programmati l’apparato è stato sperimentato per lo studio del moto di una trapezista (con tre telecamere), per lo studio di urti in due dimensioni e per lo studio di un pendolo caotico.

Un’esperienza-tipo di esplorazione del moto in due dimensioni (non ancora finalizzata all’approfondimento di moti con traiettorie di particolare interesse matematico e fisico) è descritta nella didascalia della figura che segue.

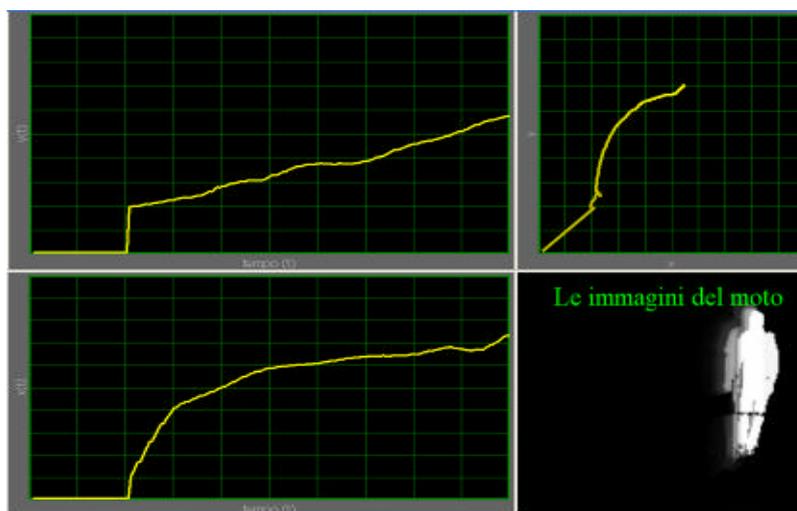


Fig 4.1: Una persona, ripresa da *due telecamere*, si muove in un’area delimitata. In tempo reale (mentre la persona si muove) si osservano l’immagine della persona stessa, il grafico della traiettoria e i grafici temporali (in questo caso le leggi orarie) lungo le direzioni (tra loro perpendicolari) delle due telecamere. L’*exhibit* produce un feedback che ha una valenza estetica e didattica. Il visitatore può analizzare-aggiustare il suo movimento correlando l’immagine-scia (in basso a destra) con i grafici cinematici e la traiettoria ad esempio analizzandone la fluidità o l’impulsività. Lo stesso exhibit può lavorare con configurazioni diverse permettendo quindi di giocare-esplorare-creare divertendosi e di approfondire lo studio del moto in due dimensioni di persone e oggetti di interesse fisico: di particolare interesse risultano i moti con traiettorie familiari (spirali, circonferenze, quadrati, ecc.).

Dal punto di vista didattico ed espositivo le soluzioni trovate permettono di lavorare almeno sui seguenti piani tra loro correlati:

- la **percezione senso-motoria** (la persona che cammina osserva in tempo reale la costruzione del grafico cinematico e può modificare (“aggiustare”) il proprio camminare in base ai feedback che riceve) che permette di “vivere” e dare significato a grafici, concetti e operazioni matematiche;
- il **coinvolgimento emotivo** (le esperienze sono realizzate in grande gruppo, utilizzando un grande schermo e coinvolgendo l’intera classe in attività che emozionano e divertono mentre si impara condividendo significati e “scoperte”);
- la **rappresentazione grafica** e la **multirappresentazione** di fenomeni e concetti (più grafici dello stesso moto sono spesso da interpretare insieme, ad esempio quelli di posizione, velocità accelerazione e quello dello spazio delle fasi, le funzioni sono rappresentate in forme diverse, ecc.);

4.2 Moto in due dimensioni con basso attrito

L'esperienza qui descritta si svolge da alcuni anni con le matricole del Corso di Laurea in Fisica dell'Università degli Studi di Napoli Federico II e in corsi di formazione di insegnanti delle superiori. Con gli studenti il lavoro si svolge in due sessioni e prosegue con un'attività di studio a casa per la stesura di una relazione e l'elaborazione dei dati e una successiva discussione in aula sull'interpretazione degli esperimenti svolti.

Nella prima attività, di due ore, si realizzano in aula alcuni moti e si discute sui modi di descriverli a parole e con un formalismo matematico. I moti sono in più dimensioni e riguardano oggetti che in generale traslano e ruotano. Gli oggetti sono lanciati in aria, lasciati andare lungo guide, lanciati su piani orizzontali, ecc. e si cerca di ritrovare le regole che permettono di ottenere traslazioni, rotazioni, roto-traslazioni, traiettorie note. L'analisi è di tipo qualitativa ed è finalizzata alla condivisione della terminologia. Per la descrizione formale si cerca di "recuperare" concetti studiati a scuola, che si riferiscono al moto rettilineo con velocità costante e con accelerazione costante, al moto parabolico del proiettile. La discussione collettiva mette in evidenza una generale difficoltà nell'utilizzare concetti e definizioni per descrivere i moti realizzati. L'attività prosegue con alcuni esempi che permettono di introdurre la velocità media e l'accelerazione media calcolando rapporti incrementali con registrazioni di moti. L'ultima parte è dedicata all'illustrazione dell'esperienza che sarà poi realizzata in laboratorio: in particolare è presentata la tavola a cuscino d'aria (vedi figura che segue) e si discute sul modo di registrare i moti, sulla geometria dell'apparato, ecc. Alla fine gli studenti sono invitati a rivedere sul libro di fisica utilizzato a scuola gli argomenti presentati in aula. Nella seconda attività, di circa tre ore di laboratorio, gli studenti lavorano in piccoli gruppi realizzando esperienze descritte in una scheda che dà indicazioni non prescrittive sul modo di lavorare. Nella discussione successiva in aula si analizzano le relazioni di alcuni gruppi e si presenta un'elaborazione dei dati sperimentali con il foglio elettronico.

La valutazione degli elaborati e dei questionari mostra che con un numero relativamente limitato di ore, finalizzando l'attività di laboratorio ad una modellizzazione graduale che integra aspetti di fisica, di algebra elementare e di geometria, gli studenti riescono ad acquisire abilità nel descrivere moti legando l'analisi ad atteggiamenti critici che possono maturare nella pratica di laboratorio. Nell'ambito di un lavoro di tesi è stata svolta una valutazione sull'efficacia dell'intervento che ha mostrato un sensibile miglioramento degli studenti (rispetto a precedenti indagini) nell'acquisire concetti di base della meccanica. E' emerso inoltre il fatto che gli studenti dichiarano di apprezzare interventi nei quali, l'elaborazione dei dati sperimentali è legata alla costruzione di modelli interpretativi che permettono di valorizzare le conoscenze già acquisite a scuola.

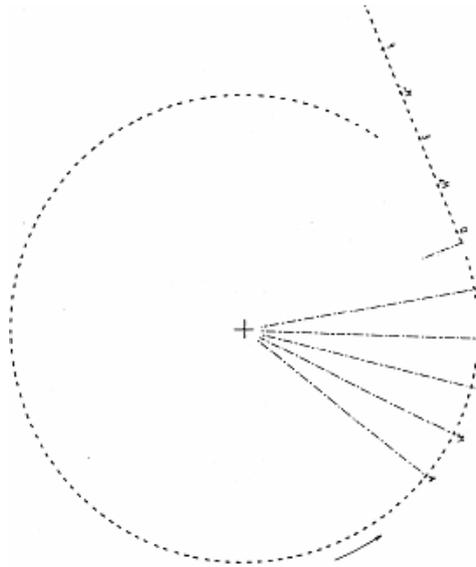
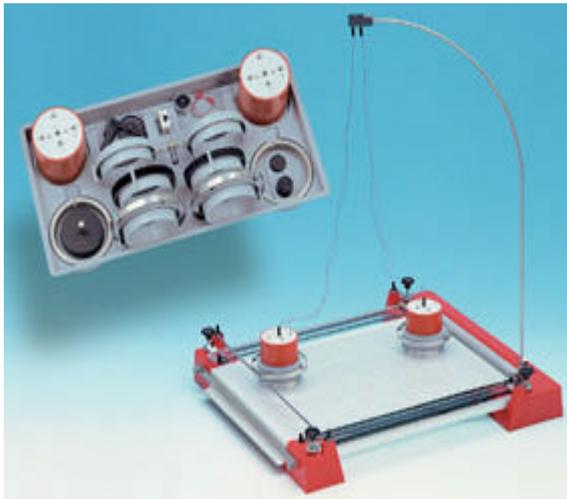


Fig. 4.2 A sinistra l'apparato (della Leybold) per la registrazione del moto in due dimensioni. I cilindri in figura si muovono con poco attrito su un cuscino d'aria e a intervalli regolari di tempo è possibile incidere sul foglio steso sul piano la posizione del baricentro o di un punto esterno. La tavola può essere in orizzontale o inclinata. A destra la registrazione del moto del baricentro di un singolo cilindro (legato ad un filo) in moto circolare uniforme (senso antiorario). Sulla destra il filo di collegamento viene bruciato e il disco prosegue la sua corsa con moto rettilineo uniforme con direzione tangente alla circonferenza e conservando la velocità lineare.

4.2.1 Il moto di roto-traslazione e la cicloide

Lo studio del moto del corpo rigido costituisce uno degli argomenti in cui difficilmente si riescono a svolgere esperienze di laboratorio. Eppure l'argomento è particolarmente ricco di spunti per esplorare il rapporto tra matematica e fisica. Nella figura che segue viene presentato un esperimento che è stato al centro di un lavoro con insegnanti laureati in matematica.

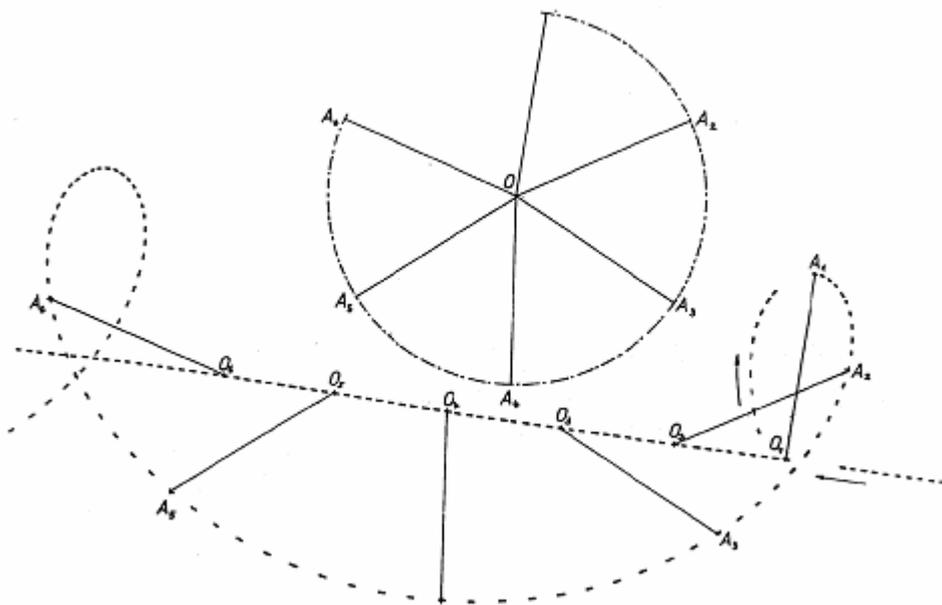


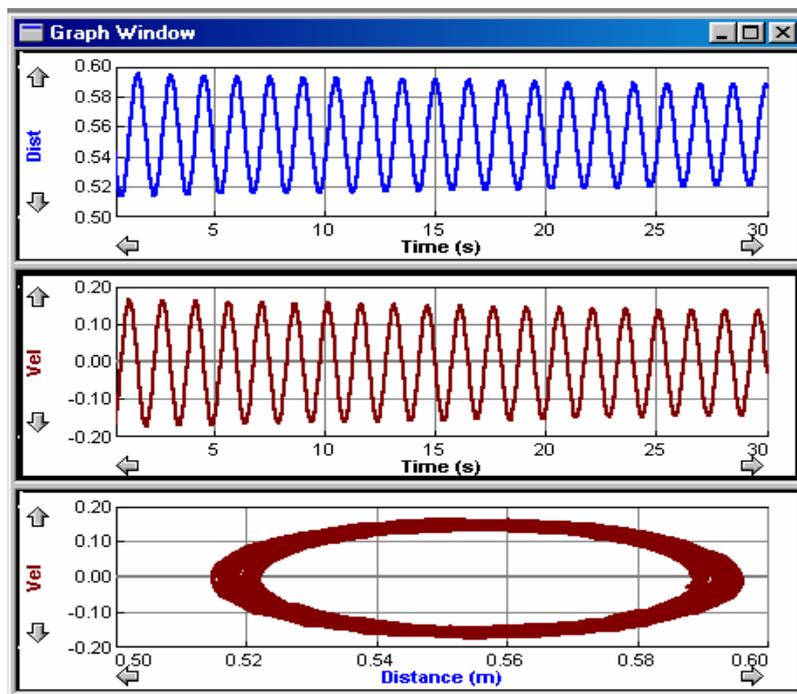
Fig. 4.3 Registrazione realizzata con l'apparato a destra della figura precedente. Il cilindro si muove sul piano orizzontale (da destra) con un moto di rototraslazione. La registrazione con due elettrodi (centro e periferia) mostra che il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme mentre l'elettrodo posto sulla circonferenza della base del disco descrive una cicloide. Poiché la registrazione avviene in contemporanea è possibile collegare i punti associati come in figura. La circonferenza in alto, ottenuta per costruzione geometrica mostra che nei limiti degli errori sperimentali l'elettrodo periferico si muove di moto circolare uniforme nel sistema del baricentro.

Sinteticamente **il lavoro con gli insegnanti** si è sviluppato su due piani tra loro correlati: - ci si è confrontati sulla possibilità di far lavorare i ragazzi in classe e in laboratorio analizzando ed elaborando le figure della registrazione del moto per la costruzione dell'equazione parametrica della cicloide a partire dai dati sperimentali anche utilizzando il foglio elettronico; -si è discusso sulla progettazione di un percorso didattico di approfondimento fisico (applicazioni, pendolo cicloidale, curva di discesa più rapida, ecc.) ed uno di carattere storico-matematico sul problema della determinazione dell'area dello spazio delimitato dalla cicloide.

4.3 Moto in una dimensione e correlazione tra grafici

Nei due esempi descritti in questa sezione si è fatto uso di un sistema per l'acquisizione automatica dei dati sperimentali costituito da un sonar collegato ad un computer¹⁰ attraverso una scheda di interfaccia e di un ambiente di simulazione-modellizzazione¹¹. Gli esperimenti sono schematicamente descritti nelle didascalie delle figure che seguono.

4.3.1 Il moto oscillatorio, la posizione, la velocità e l'energia



¹⁰ Il sistema utilizzato è LoggerPro e LabPro della Vernier, www.vernier.com

¹¹ Con sistemi per la *modellizzazione dinamica e per oggetti* la struttura generale di un sistema dinamico (rappresentato con notazioni grafiche) definito dall'utente può essere trasformato "automaticamente" in un modello matematico caratterizzato anche da molte equazioni. Con il sistema stella® si possono modellizzare fenomeni e situazioni molto generali (anche non nell'ambito della fisica). Una demo è scaricabile dal sito: <http://www.hps-inc.com/edu/stella/stella.htm>. Con Interactive Physics™ (<http://www.interactivephysics.com/>) è possibile modellizzare situazioni e processi in un universo fisico regolato dalla meccanica newtoniana.

Fig. 4.4 Grafici dell'oscillatore armonico realizzati in un esperimento in tempo reale. Il sonar è in basso e riprende il blocchetto attaccato alla molla. Contemporaneamente sono costruiti il grafico della distanza e della velocità in funzione del tempo e il grafico della velocità rispetto alla distanza. I grafici permettono di evidenziare la presenza di un attrito e quindi la velocità rispetto alla distanza tenderebbe a riempire l'intera superficie racchiusa dall'ellisse dell'oscillatore senza attrito. La rappresentazione grafica può aiutare in questo caso a far acquisire competenze formali nello scrivere equazioni.

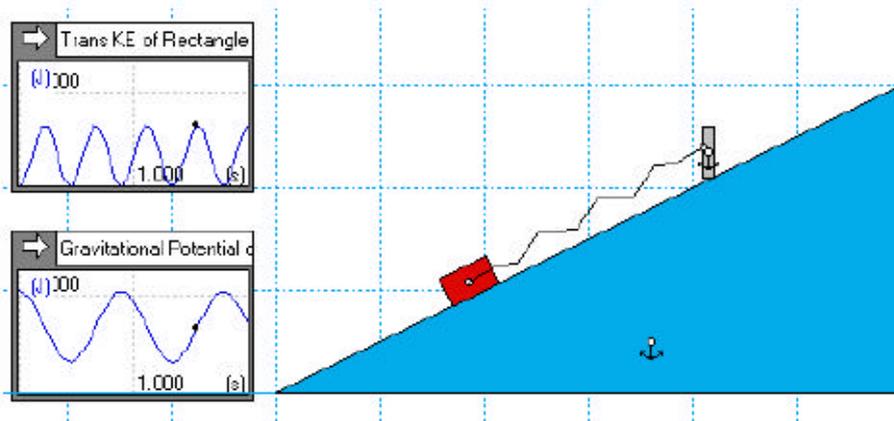


Fig. 4.5 Simulazione con Interactive Physics del moto del blocchetto attaccato alla molla. Il confronto tra i grafici dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di gravità (costruiti in tempo reale con l'animazione nel laboratorio virtuale) aiuta a comprendere il rapporto esistente tra energia cinetica, potenziale elastica e potenziale di gravità.

4.3.2 Moto con accelerazione costante a tratti

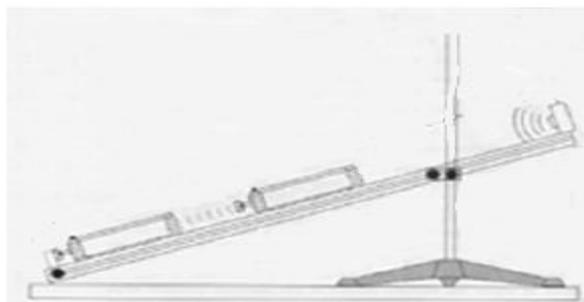


Fig. 4.6 Il carrello, ripreso dal sonar in alto, parte da fermo, in basso, con la molla compressa. A $t < 2$ s la molla viene liberata e il carrello parte in salita lungo la guida, a $t = 4$ s si ferma e inizia a scendere, a $t = 7$ s urta con il pistone a molla contro il blocco in basso. Nell'urto la molla si contrae, poi si dilata rilanciando il carrello verso l'alto che raggiunge una quota minore. Il fenomeno si ripete alcune volte. I grafici in tempo reale sono nella figura che segue.

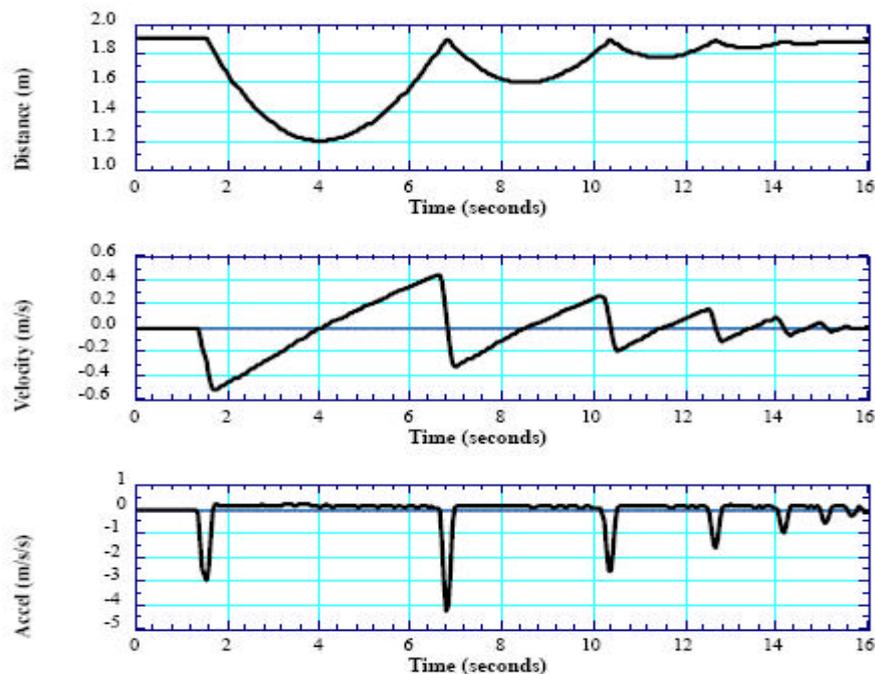


Fig. 4.7 Grafici della posizione, della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo del carrello della figura precedente. L'analisi può essere fatta analizzando prima gli intervalli di salita e discesa, poi gli intervalli relativi all'urto, poi l'intero moto. In ciascun intervallo di salita e discesa la legge oraria è una "quasi parabola" con la concavità rivolta verso l'alto, la velocità è approssimativamente una retta con pendenza positiva, l'accelerazione è una retta orizzontale. Gli urti sono caratterizzati da picchi verso il basso dell'accelerazione (con valore medio negativo), velocità decrescente e posizione con concavità verso il basso. L'analisi complessiva mostra che nei limiti degli errori l'accelerazione è la stessa in tutte le fasi di salita e discesa, e che l'urto è anelastico con una perdita percentuale costante di quota massima. In questo esperimento la possibilità di correlare funzioni e funzioni derivate e la necessità di analizzare in diversi intervalli il movimento con le rispettive equazioni aiuta a costruire una visione dinamica del concetto di funzione.

4.3.3 Osservazioni didattiche sui due ultimi esperimenti

Gli ultimi due esempi si riferiscono ad esperienze proposte, con approfondimenti diversi, in scuole superiori, al primo anno dell'Università e in attività di formazione docente. Entrambi si inseriscono in percorsi che permettono di affrontare concetti e fenomeni fisici che riguardano il rapporto tra forza, energia e movimento. Per quanto riguarda la costruzione di concetti e competenze specifici della matematica, l'attività di modellazione (che integra descrizioni qualitative globali e descrizioni analitiche) risulta particolarmente ricca in riferimento ai seguenti aspetti:

- talvolta le **situazioni sperimentali** risultano **non immediatamente interpretabili** anche da adulti, (ad esempio insegnanti in formazione e in aggiornamento). Negli ultimi due esempi la presenza in entrambi gli esperimenti della molla (forza elastica) e del piano inclinato (forza di gravità) inducono in possibili errori nel collegare le due forze, nel riconoscerne i ruoli e quindi nel prevedere-interpretare i grafici del moto. Le **competenze matematiche** si rivelano **decisive** per chiarire diversi aspetti fisici: la correlazione tra i **grafici di grandezze con le loro derivate** e la possibilità di leggere la forza attraverso l'accelerazione (**derivazione e integrazione grafica**), con le informazioni ridondanti che aiutano a trovare conferme, sono le chiavi interpretative che anche gli esperti usano per districarsi nella fenomenologia!
- il **concetto di funzione** è legato all'esigenza di rappresentare come cambia una grandezza e la sua comprensione è intimamente legata al significato dei processi inversi di derivazione e di integrazione con il teorema fondamentale del calcolo. Tradizionalmente i due

processi sono insegnati con metodi simbolici e procedurali e poi applicati per risolvere problemi in alcuni esempi. Questo approccio formale è ovviamente indispensabile per acquisire competenze matematiche tuttavia se non integrato in approcci più ampi non solo diventa difficile per molti studenti ma risulta da ostacolo per la comprensione del significato stesso di funzione in un gran varietà di situazioni di interesse quotidiano e scientifico e anche per acquisire poi competenze in matematica più avanzata (M. Carlson and M. Oehrtman 2005). Ad esempio (Dubinsky, 1992), Kaput (1992; 1993), Nemirovsky (1993) suggeriscono di partire proprio dalle idee che i ragazzi hanno di distanza, velocità e accelerazione per utilizzare simulazioni al computer che integrando aspetti grafici e numerici permettono di introdurre precocemente gli elementi di base del calcolo. Negli esempi appena presentati gli studenti hanno la possibilità di **correlare globalmente** grafici di funzioni con le derivate e di lavorare visualizzando e calcolando pendenze di rette tangenti (ad esempio sul grafico della legge oraria per la velocità “istantanea”) e aree sottese da grafici (ad esempio del grafico della velocità per il calcolo della distanza percorsa). E ciò dovrebbe aiutare a costruire un concetto di **funzione** legato in modo dinamico ad un **processo** e ad un **ragionamento covariazionale** (imparando a controllare variazioni di due grandezze correlate) piuttosto che a un concetto statico (ad esempio vedendo la funzione come regola per ottenere un valore da una formula (Dubinsky & Harel 1992).

- la possibilità di costruire in tempo reale la traiettoria velocità-distanza imparando a descrivere fenomeni attraverso lo spazio delle fasi può aiutare sia a dare significato ad equazioni di coniche, spirali, ecc. sia ad acquisire competenze per descrivere attraverso forme ed equazioni matematiche comportamenti di sistemi standard e complessi

Conclusioni

Il linguaggio naturale non si acquisisce con ripetizioni ed esercizi in modo puramente mentale e astratto ma soprattutto per “immersione” in contesti in cui sono contemporaneamente presenti l’esperienza e i fatti e gli oggetti a cui le parole si riferiscono. L’acquisizione del linguaggio fisico-matematico richiede invece impegno e sistematicità costringendoci ad adeguarci a tecniche formali “non naturali”.

Tuttavia il comprendere è un processo complesso che coinvolge diverse funzioni e le strategie di insegnamento devono essere flessibili e mirate. Senza rinunciare agli aspetti formativi della matematica e della fisica occorre che si entri *in risonanza* con chi deve apprendere: valorizzando ciò che naturalmente sa fare e ciò che ha già imparato (anche in altri contesti, discipline, ecc.)

Lo studio del movimento dal punto di vista fisico e matematico costituisce un terreno fertile per esplorare le potenzialità di un metodo di insegnamento e di apprendimento che cerca di integrare/valorizzare l’intelligenza visiva e spaziale (concreta e più antica in termini evolutivi) e quella logico-linguistica (astratta e più recente in termini evolutivi). Il movimento (legato ad una attività-funzione più antica dal punto di vista evolutivo) è alla base dei processi di rappresentazione mentale e dello sviluppo del linguaggio naturale. La comprensione dei concetti che ne permettono la descrizione con la graduale interiorizzazione del linguaggio fisico-matematico può giovare della possibilità di vivere e rivisitare cognitivamente esperienze condivise che danno significato ai termini usati e ne permettono una memorizzazione più stabile facendo ricorso a concetti unificanti e trasversali.

Gli esempi proposti fanno riferimento ad esperienze sviluppate da anni in contesti informali (museo interattivo) e formali (scuola, da quella dell’infanzia alla secondaria superiore; università nei corsi di laurea in fisica e matematica) con migliaia di studenti e centinaia di insegnanti in servizio e in formazione. In particolare costituiscono parti di percorsi didattici sviluppati in verticale sul rapporto

tra movimento, forza ed energia e finalizzati alla costruzione di concetti matematici e fisici nell'attività di modellizzazione. Gli esempi vogliono essere degli spunti e dei contributi per un confronto teso allo sviluppo di proposte di curricolo di matematica e fisica coerenti e sinergici che aiutino *a comprendere* nello studio (sia autonomo sia integrato) delle due discipline.

Bibliografia

Baddeley, A. (1995) *La memoria umana*. Il Mulino, Bologna.

Balzano E. (2001), "Il Progetto LES: percorsi di fisica e integrazioni disciplinari su scienza e tecnologia" TD-Tecnologie Didattiche n.22, ITD CNR-Genova, Edizioni Menabò

Balzano E., Carlone R., Minichini C. (2006). *Costruzione di concetti e competenze matematiche nella modellizzazione di fenomeni fisici con l'uso di sistemi informatici*. Atti del II Convegno Nazionale "La matematica e la fisica nella scuola e nella formazione degli insegnanti", Edited by O. Robutti e M. Mosca, Ghisetti e Corvi Editori

Carlson, M & Oehrtman, M. (2005). *Research Sampler, Key aspects of knowing and learning the concept of function*, Mathematical Association of America

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. III. CBMS Issues in Mathematics Education*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Damasio, A.R. (1995) *L'errore di Cartesio. Emozione, ragione e cervello umano*", Adelphi, Milano

Dehaene S. (2000), *Il pallino della matematica*, Mondadori

Dehaene, S., Izard, P., Pica, P., Spelke, E. (2006), Core knowledge of geometry in an Amazonian indigene group, *Science* (20 Jan.)

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. *MAA Notes*, 25, 85-106.

Feynman R., (1971) *La legge fisica*, Bollati Boringhieri

Gardner, H., (1999) *Sapere per comprendere, discipline di studio e discipline della mente*. Feltrinelli, Milano

Goleman, D. (1998) *Lavorare con intelligenza emotiva*, Rizzoli, Milano

Israel G., (2002) *Modelli matematici. Introduzione alla matematica applicata*, Muzzio

Malinvaud, E. (1964), *Méthodes statistiques de l'économetrie*, Dunod, Paris

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 175-194), *MAA Notes*, 25. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Morin E.(1986) , *La conoscenza della conoscenza*, Feltrinelli

Kaput, J. (1992). Patterns in students' formalization of quantitative patterns. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. *MAA Notes*, 25. Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematics and Cognitive Science*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Monk, S., & Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. I. CBMS Issues in Mathematics Education* Providence, RI: American Mathematical Society.

Shternberg, B., Yerushalmy M. (2005) in Modeling-based learning environments, chapter 26, <http://construct.haifa.ac.il/~michalyr/chapter7.10FINAL.pdf>

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). New York: Macmillan.

Thom R. (1985), *Modelli matematici della morfogenesi*, Einaudi