UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
SUOR ORSOLA
BENINCASA

DIPARTIMENTO DI
SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA

CORSO DI LAUREA

SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA

TESI DI LAUREA
IN
DIDATTICA DELLA FISICA

DISCRETO-CONTINUO
Approcci e modelli nella scuola primaria

Relatore
Prof Emilio Balzano

Candidato Mariangela Carpine
Matricola 208004523

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

Alla mia famiglia

INDICE

CAPITOLO I: DIDATTICA DELLA FISICA

CAPITOLO II: NUMERI, PENSIERO SPAZIALE, GEOMETRIA E MISURA

CAPITOLO III: DISCRETO-CONTINUO

CAPITOLO IV: IPOTESI PROGETTUALI DI ATTIVITÁ DIDATTICHE

CAPITOLO V: SPERIMENTAZIONE

INTRODUZIONE

Nel corso di tutti i miei studi scolastici mi sono sempre sentita dire che ero molto portata per le materie scientifiche, ma non per quelle letterarie. Per questo motivo, nessuno si sarebbe mai aspettato questa mi scelta verso una facoltà umanistica, in quanto venivo da studi tecnici, ma nonostante questo sono sempre stata convinta della mia scelta.

Nel corso di questi cinque anni ho incontrato non poche difficoltà nell'affrontare argomenti a me totalmente sconosciuti, ma con l'impegno e la costanza sono riuscita ad entrare in questo mondo pedagogico-didattico-psicologico che ad oggi tanto mi affascina.

Ho scelto questo percorso perché così come H. Gardner, il quale formulò per la prima volta trent'anni fa la teoria delle intelligenze multiple, ritengo che sia sbagliato etichettare gli alunni con i nomi dell'intelligenze. Seconda tale teoria, le intelligenze sono modi di conoscere che possono operare indipendentemente e per questo non vanno confuse con i talenti, le predisposizioni e le attitudini o gli stili di apprendimento. Le intelligenze sono canali cognitivi legittimi che ogni alunno può applicare in modo flessibile in tutto il curricolo e in contesti diversi. Dal punto di vista di Gardner, la teoria delle intelligenze multiple dovrebbe servire a potenziare gli alunni e non a "diagnosticare" i loro punti di forza o deficit.

Partendo da questo punto di vista il mio obiettivo sarà quello di divenire un insegnante, indipendentemente da ciò che andrò ad insegnare, capace di supportare le inclinazioni di ciascun alunno, ma senza etichettarli, perché ognuno di noi con il giusto incoraggiamento può riuscire in qualsiasi cosa, anche se non si è "predisposti".

In ogni caso, in questo lavoro di tesi ho voluto seguire quelle che sono le mie inclinazioni scientifiche, ma anche definire un percorso innovativo, che presenti le materie scientifiche sotto una luce diversa e che aiuti ad introdurre dei concetti che magari non penseremo mai di presentare nella scuola primaria.

Nel primo capitolo viene sottolineata l'importanza di tre componenti in Didattica della Fisica, quella epistemologica, didattica e cognitiva; le quali devono essere tenute in considerazione durante sia la progettazione delle attività, che nell'analisi dei processi in Didattica della Fisica o della Matematica.

Nel seguito, nell'ambito delle scienze cognitive, saranno illustrate due parti integranti basate su quadri di riferimento consolidati, l'embodied cognition e la mediazione semiotica in senso vygotskiano, che sottolineano la funzione essenziale del corpo, inteso come unico mezzo attraverso il quale le capacità sensomotorie di un organismo lo mettono in grado di interagire in modo efficacie con l'ambiente circostante. In contrapposizione a tali teorie, Piaget affermerà che lo sviluppo delle attività cognitive di un bambino segue degli stadi biologici che si susseguono.

Oggi, numerose ricerche, effettuate sia con gli animali che con i bambini, hanno dimostrato che ciò che affermava Piaget era "sbagliato". Tra queste verrà analizzata la metafora dell'accumulatore di S. Dehaene, una teoria che cercherà di spiegare come funziona il calcolo negli animali.

Infine, verranno messe in risalto due evidenze; la prima dimostrerà come i bambini, senza alcuna influenza culturale, già a partire dai primi mesi di vita, così come gli animali, possiedano il "senso del numero"; la seconda, l'antropologia cognitiva, permetterà di mettere in atto uno studio di popolazioni (come i Piraha e i Munduruku) che non sono dotate di scrittura e/o che utilizzano una lingua più povera di quella propria alla nostra comunità, ma che nonostante ciò dimostrano di possedere abilità cognitive atte ad effettuare dei calcoli approssimativi.

Nel secondo capitolo, si affronteranno diversi temi fondamentali per lo sviluppo del pensiero scientifico del bambino. Primo tra tutti è il sistema di numerazioni, ad oggi di tipo posizionale, anche se nel corso del tempo ne sono stati utilizzati di diversi. Così come lo è per noi oggi, il concetto di numero si consoliderà nelle società passate per ragioni di tipo utilitaristiche e pratiche, e si evincerà, da numerose ricerche, come i bambini in fase evolutiva ripercorrano tutta la storia dell'evoluzione del concetto di numero mentre apprendono.

Inoltre, in campo aritmetico, verrà presentato il contributo di Rochel Gelman e Charles R. Gallistel nel libro "The child's understanding of number", nel quale vengono delineati i cinque principi universali del numero *("principio uno a uno", "principio dell'ordine stabile", "principio di cardinalità", "principio d'astrazione" e "principio di irrilevanza dell'ordine")*. Dai principi, si evince che il numero è uno strumento indispensabile e complesso, il quale possiede degli aspetti (cardinale, ordinale, ricorsivo e di misura) fondamentali che verranno spiegati nel corso del capitolo, ma anche presentati in delle modalità di applicazione all'interno della scuola dell'infanzia e primaria.

Successivamente, dal concetto di numero si passerà a quello di pensiero spaziale, essenziale in matematica per descrivere, rappresentare e comprendere il mondo. Accanto al pensiero spaziale si aggiungono due concetti, che forniscono sistemi aggiuntivi e potenti, la geometria e la misurazione.

Infine, verrà indicato come uno dei principali obiettivi della prima educazione quello di stimolare e promuovere il ragionamento matematico. Infatti, attraverso l'applicazione dei processi matematici generali di *ragionamento, rappresentazione, risoluzione dei problemi, connessione e comunicazione,* i bambini possono andare avanti e indietro tra matematica astratta e situazioni reali nel mondo che li circonda.

Nel terzo capitolo, si andrà a delineare un percorso attraverso il quale si cercherà di trovare una descrizione, o meglio un significato, ai due concetti centrali che sono *discreto* e *continuo*.

Successivamente, si parlerà del concetto aritmetico di numeri reali, i quali nel loro insieme riescono al meglio a rappresentare l'idea di *continuo*, poiché sono caratterizzati da tre proprietà fondamentali: densità, completezza ed ordine. Invece, con un sottoinsieme dei numeri reali, quello dei numeri naturali, che grazie alle sue proprietà (la cardinalità e l'ordinalità), ci darà l'idea di quel *discreto* "numerabile". A favore di questa "problematica" interverrà il pensiero dello studioso Paolo Guidoni, il quale introdurrà due definizioni, quella di "individuo" e di "sostanza continua".

Inoltre, data la caratteristica dei numeri naturali, che ci permettono di contare "cose", hanno sempre avuto un ruolo fondamentale all'interno della scuola primaria, ma negli ultimi anni, grazie ad una trasposizione culturale[1], si sta cercando di favorire un'introduzione precoce del pensiero algebrico. Precursore di quest'idea, sviluppata già prima del 1957, fu lo psicologo russo Davydov.

[1] Con questo termine si intende un processo di cambiamento che si sviluppa quando vi è un incontro di pratiche didattiche di differenti culture, che consentono il ripensamento delle proprie (Ramploud, e Mellone 2015).

In un secondo momento, attraverso un approccio Filosofico e Fisico, si cercherà di identificare la materia come sostanza continua o discreta. Inoltre, seguendo questo obiettivo, della materia verranno definite sia le sue proprietà fisiche e chimiche, che le sue proprietà visibili sia ad occhio nudo (macroscopiche) che non visibili (microscopiche). Tra le sostanze macroscopiche verranno messi in luce i materiali granulari, che grazie al loro uso si potranno sviluppare dei modi alternativi per contarli o misurarli sia in caso di *discreto*, che di *continuo* discretizzato, o di *continuo.*

Infine, verrà esposta una delle più grandi sfide nel mondo della fisica, quella di identificare se spaziotempo siano degli elementi continui o discreti. Si partirà con "Il paradosso di Zenone" (Achille e la Tartaruga), il quale nonostante si sia risolto grazie al calcolo infinitesimale, si porterà avanti la "questione" sulla struttura spaziotempo.

Ci saranno numerosi tentativi nel voler dimostrare la struttura continua o discreta, alla fine si riscontrerà un nuovo paradosso dell'epoca moderna, quello sull'informazione dei buchi neri, introdotto nel 1974 da Stephen Hawking; si spera che per arrivare ad una possibile soluzione di quest'ultimo paradosso, non si debba aspettare altri duemila anni.

Il quarto ed il quinto capitolo sono incentrati sulla progettazione di attività didattiche. Nello specifico, nel quarto saranno presentate delle ipotesi progettuali didattiche che purtroppo non ho potuto sperimentare in presenza a causa dell'emergenza COVID19. Si tratta di sperimentazioni che sviluppano i concetti di *discreto* e *continuo*, la misurazione e le unità di misura, i materiali granulari, il numero e lo spazio.

Invece, nel quinto verrà descritta la sperimentazione realizzata nella 2°G del 1° C.D. Marconi di Afragola. Per l'emergenza sanitaria l'intero percorso didattico è stato sviluppato in DAD. Tutte le attività sono state documentate attraverso foto, registrazioni delle conversazioni con i bambini, gli elaborati degli alunni, video ed interviste effettuate alla maestra Maria Tuccillo ed ai bambini.

CAPITOLO I: DIDATTICA DELLA FISICA

1.1 COMPONENTE EPISTEMOLOGICA

Il termine *epistemologia* è definito come:

1. sinonimo di gnoseologia o di teoria della conoscenza, si riferisce all'indagine sui metodi e sui fondamenti della conoscenza scientifica;
2. sinonimo di filosofia della scienza, si riferisce all'indagine critica intorno ai contenuti concettuali, alle metodologie e alle implicazioni culturali delle varie scienze.

In didattica della fisica, ma non solo, la riflessione epistemologica si fonda sulla preparazione dei docenti, i quali devono non solo conoscere ciò che si vuole insegnare ma anche i modi con cui queste conoscenze si sono costituite nella storia.

Questo per due motivi: uno *culturale* ed uno *professionale*.

Il motivo *culturale* è incorporato nella figura del docente che, *in primis*, deve operare una trasposizione didattica[2].

Effettuare una trasposizione didattica vuol dire che l'insegnante non può limitarsi al presentare il sapere fisico o matematico elaborato accademicamente, ma egli deve adattare quest'ultimo alle strutture cognitive in formazione, cercando di non perdere gli aspetti strutturali del sapere.

[2] Yves Chevallard ha elaborato questo concetto nell'ambito delle didattiche disciplinari ed in particolare della didattica della matematica.

Il docente deve stabilire delle relazioni opportune tra "sapere sapiente", "sapere insegnato" e "sapere appreso", presupponendo la distinzione tra forma scientifica e forma didattica dei saperi.

Tale trasformazione non è affatto banale, anzi, al contrario, è ampiamente creativa e fa strettamente parte della professionalità docente[3]. È la trasposizione didattica così intesa a permettere l'utilizzo formativo dei saperi nella costruzione del curricolo, consentendo di evitare le aridità del nozionismo e del disciplinarismo propri della mera trasmissione della forma scientifica dei saperi.

Inoltre, dal "sapere" al "sapere insegnato" si deve tener conto degli allievi, dei loro bisogni, delle loro attitudini, rendendosi necessario utilizzare una comunicazione efficace.

Il motivo *professionale* consiste in una profonda consapevolezza e conoscenza da parte del docente, al fine di aggirare i cosiddetti ostacoli epistemologici.

Infatti, egli non potrebbe compiere quell'atto creativo che è la trasposizione se non è in grado di scegliere criticamente all'interno di un corpus teorico.

L'insegnante non riuscirà mai a comunicare o a personalizzare il proprio sapere se quest'ultimo non è costruito dentro sé stesso e non appartiene alla sua esperienza personale e vissuta.

Inoltre, si sostiene che una buona *competenza epistemologica* non può prescindere da una competenza storica, in quanto, le due, devono essere considerate in modo complementare.

Appare dunque fondamentale che un insegnante si confronti direttamente con la storia

---

[3] D'Amore B., *Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. La matematica e la sua didattica*, 2004, p.4.

della disciplina, che giunga a saper impiegare i riferimenti storici consapevolmente e coerentemente con le proprie concezioni epistemologiche.

In generale, la storia offre alla didattica alcune importanti opportunità:

– un approccio aneddotico che, pur essendo talvolta considerato superficiale, può rinforzare in termini apprezzabili la motivazione dei discenti;
– una riflessione metacognitiva;
– una conoscenza organica di un periodo storico e della comprensione delle situazioni culturali che hanno influenzato la nascita o la diffusione di un'idea matematica[4].

Infine, l'ultimo "tassello" della trasposizione didattica è la *mediazione*. Il concetto di *mediazione* fa riferimento a un medium, ovvero una sorta di collegamento duplice tra chi sa e chi apprende, tra oggetto d'apprendimento e soggetto apprendente.

L'insegnate opera la mediazione didattica in quanto allestisce, organizza e impegna qualsiasi "dispositivo" atto a favorire il contatto produttivo in termini di conoscenza, abilità e competenza.

Il pedagogista italiano E. Damiano propone un suo modello di mediazione didattica, il quale ha la finalità esplicita di istituire relazione stabile e produttiva tra oggetto e soggetto, modello di funzionamento (epistemologico) dell'oggetto e modello di funzionamento (cognitivo) del soggetto. Damiano definisce il mediatore didattico come:

«ciò che agisce da tramite tra soggetto e oggetto nella produzione di conoscenza, sostituisce la realtà perché possa avvenire la conoscenza, ma non si sostituisce alla realtà esautorandola, pur richiedendo di essere trattato come se fosse la realtà, ma sempre, in quanto mediatore,

[4] D'Amore B., *ivi*, p.21.

conservando lucidamente la consapevolezza che la realtà non è esauribile da parte dei segni, quali che essi siano[5]».

Tali modi di percepire il sapere, come si analizzerà successivamente, potranno influenzare notevolmente la didattica.

1.2 COMPONENTE DIDATTICA

La componente Didattica è legata all'analisi dei modi in cui l'insegnante può organizzare e gestire l'interazione in classe.
È l'insegnante che struttura l'ambiente in modo opportuno, con strumenti adeguati, al fine di giungere ad una conoscenza specifica. Tutto avviene in un ambiente dichiarato, nel quale l'allievo sa che sta imparando e che l'insegnante sta insegnando e quest'ultimo è consapevole del suo ruolo e di come la situazione si sta sviluppando[6].
Siamo, in questo caso, in pieno contratto didattico[7]; è tutto così esplicito che spesso l'allievo, giunto al momento di dover dare risposte, non si pone domande sul contenuto, ma su che cosa l'insegnante si aspetta che egli faccia o risponda[8].

---

[5] Damiano E., *La lingua nel sistema dei mediatori didattici,* in "Didattica ed educazione linguistica", a cura di F. Camponovo e A. Moretti, La Nuova Italia, 2000, p.230.
[6] Asenova M., D'AmoreB., Fandiño Pinilla M.I., Iori M. e Santi G., *La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica*, 2020, p.32.
[7] Si tratta di un costrutto teorico prodotto oltre venti anni fa nell'ambito della "Teoria delle situazioni didattiche" di G. Brousseau particolarmente utile per descrivere i rapporti, riguardanti le prestazioni matematiche, che inevitabilmente si creano in classe tra insegnante e allievi.
[8] Asenova M., D'AmoreB., Fandiño Pinilla M.I., Iori M. e Santi G., *cit,* p.33.

I comportamenti socio-cognitivi dei soggetti implicati nel contratto dipendono da regole implicite ed esplicite del docente. L'insegnante, attraverso il contenuto proposto, costruisce, inconsapevolmente, un'idea della disciplina.

Per giunta, il contratto didattico influenza l'idea che gli alunni possiedono riguardo la scuola e la Matematica; la prima viene vista come un'istituzione direttiva e valutativa che non rende liberi gli alunni di esprimere le loro opinioni, la seconda è percepita come una disciplina nella quale si devono svolgere sempre dei calcoli e i problemi che vengono forniti dall'insegnante devono poter essere sempre risolti.

Per rompere questo contratto didattico si deve tenere sempre presente che la conoscenza della Fisica o della Matematica includono non solo concetti, ma anche sistemi di rappresentazione simbolica, non solo processi di sviluppo, ma anche validazioni di nuove idee. Inoltre, il fulcro della didattica sono gli studenti e l'oggetto della conoscenza, non l'insegante.

La "Teoria delle situazioni didattiche" pone in evidenza come sia possibile mettere in atto, in classe, una situazione *a-didattica* nella quale non ci sono obblighi. Dunque, quel che si fa non è legato a spinte da parte dell'insegnante che, in questo caso, non interviene ma assume solo un ruolo da "regista". Sono gli allievi i protagonisti che partecipano attivamente a qualcosa che non è esplicitamente cognitivo, di cui solo l'insegnante è consapevole, ma non dichiara lo scopo dell'attività.

L'allievo fa (da solo o in gruppo) dei tentativi, verifica che i tentativi falliscono o sono inefficaci; si deve rifare più volte la prova; interagendo con gli elementi dell'ambiente, l'allievo modifica il suo sistema di conoscenze a causa degli adattamenti che deve fare nell'utilizzare varie strategie[9].

---

[9] Asenova M., D'AmoreB., Fandiño Pinilla M.I., Iori M. e Santi G., *ivi*, p.31.

La richiesta di effettuare quell’attività pertinente alla Fisica o alla Matematica può non essere risolta al primo tentativo e può provocare allo studente o tra gli studenti una discussione per accordarsi su modalità; solo in questo caso si ha produzione di conoscenza non richiesta dall’insegnante, non istituzionalizzata.

In questa prospettiva si devono contemplare vari tipi di situazioni:

- situazioni di azione, che agiscono sull’ambiente e favoriscono il sorgere di teorie implicite che funzioneranno nella classe come modelli proto-matematici;
- situazioni di formulazione, le quali favoriscono l’acquisizione di modelli e linguaggi espliciti;
- situazioni di validazione, nelle quali agli allievi sono richieste prove e dunque spiegazioni sulle teorie utilizzate ed anche l’esplicitazione dei mezzi che sottostanno nei processi dimostrativi;
- situazioni di istituzionalizzazione, che hanno lo scopo di stabilire e dare uno status ufficiale a conoscenze apparse durante l’attività in aula[10].

Le conoscenze così maturate, nate da esempi concreti, riescono a portare gli allievi, in maniera naturale, all’acquisizione dei concetti fondamentali della Fisica e della Matematica senza “misconcezioni mistiche”.

La Didattica è quindi una struttura di mediazione tra sapere e pratica, nella quale è il soggetto che apprende al centro dell’azione insegnamento-apprendimento, favorendo così sia la dimensione relazionale (fra pari e fra discenti ed insegnanti), sia quella comunicativa che sostiene le azioni didattiche.

---

[10] Asenova M., D’AmoreB., Fandiño Pinilla M.I., Iori M. e Santi G., *ivi*, p.35.

1.3 COMPONENTE COGNITIVA

La componente cognitiva è legata all'analisi, svolta solitamente in psicologia, dei modi in cui evolvono i processi degli allievi, in particolari circostanze e di fronte a consegne specifiche collegate al sapere in gioco.

Solitamente, quando il discente viene posto dinanzi a un problema, la risoluzione di quest'ultimo si basa su attività intuitive che non sempre possono essere chiare o razionalmente motivate, sia per l'insegnante che per l'allievo.

Una fase di notevole importanza è proprio quella in cui l'allievo viene portato a riflettere sulle proprie intuizioni e dunque sulle caratteristiche della propria risoluzione del problema proposto. La riflessione, autonoma o guidata, su come si è risolto, completamente o parzialmente, un problema, è fondamentale per dare corpo all'attività didattica. Grazie alla scoperta dei processi cognitivi è possibile, ad esempio, indagare sulle scelte operate dall'allievo, sulle sue motivazioni, sui tentativi solo immaginati e magari non effettivamente attuati.

1.3.1 EMBODIED COGNITION

Negli ultimi decenni, nell'ambito delle scienze cognitive, è stato riconosciuto un approccio emergente denominato *embodied cognition*[11]. Quest'ultimo ha recentemente posto l'accento sul ruolo del corpo nella costruzione della conoscenza.

---

[11] Il termine *embodied* è stato variamente tradotto dando luogo ad espressioni quali "cognizione endocorporea", "mente incorporata", "coscienza incarnata" e simili. Però, spesso si preferisce lasciare il termine non tradotto, data la grande diffusione, in tutto il mondo, di lavori che utilizzano l'espressione inglese.

Nella concezione dell'*embodied cognition*, i processi cognitivi sono intesi non come espressione di una mente astratta e meramente computazionale, ma basati sulla nostra fisicità di esseri umani, dotati non solo di un cervello, ma anche di un corpo, esseri "incarnati" le cui idee prendono forma dalle esperienze corporee, attraverso il radicamento dell'intero sistema concettuale nella vita quotidiana[12].

L'avvaloramento del "corpo in atto" consente di aprire nuovi orizzonti alla didattica e aprire le porte a una dimensione cognitiva sul "senso del movimento". Si è dunque sviluppata una riflessione scientifica sulle potenzialità delle funzionalità corporee e sarà Alain Berthoz ad offrire una nuova chiave interpretativa alla relazione tra corpo e cognizione, attraverso il "paradigma della semplessità".

Questo approccio, atto a fronteggiare la complessità della didattica partendo dalla relazione tra corpo e cognizione, dà un più consapevole utilizzo della potenzialità di azione del corpo.

Il corpo rappresenta uno degli indirizzi rivolti ad elaborazioni ben precise ed opera a favore della selezione delle informazioni che consentono la presa di decisione. Ciò, avverrebbe grazie ai meccanismi di attenzione, il cui funzionamento induce a ritenere che il pensiero sia regolato dalla selezione di informazioni pertinenti rispetto allo scopo dell'azione. Pensare, significherebbe mettere in atto una sequenza di meccanismi corporei che permetterebbero di inibire, selezionare, immaginare, collegare, proiettare sul mondo le proprie ipotesi, le proprie intenzioni e i propri schemi interpretativi, comparando dati delle esperienze passate con le azioni in corso[13].

---

[12]Zudini V., *MatematicaMente. Dal passato al presente della didattica della matematica*, in QuaderniCIRD n.8, 2014, p.46.

[13] Rivoltella P.C., Rossi P.G., *L'agire didattico. Manuale per l'insegnamento*, 2012, pp.744-745.

L’uso del movimento in ambito didattico è capace di promuovere processi formativi; il gesto, in particolare, è la forma più evoluta di specifiche corporeità didattiche la cui corretta utilizzazione può favorire l'esito del processo di insegnamento apprendimento.

In sintesi, il “paradigma della semplessità” sottolinea quanto sia fondamentale la dinamicità, manifestata attraverso il corpo ed il movimento, in ogni attività umana; inoltre, in campo didattico viene considerato come l’insieme delle proprietà[14] utilizzabili a sostegno dei processi di insegnamento-apprendimento.

Il modello dell’*embodied cognition* trova precise applicazioni anche nel campo della Matematica, nella “teoria della matematica embodied” proposta da R. E. Núñez[15] e G. Lakoff[16]. Quest’ultimi hanno consentito di avvalorare una visione della conoscenza quale processo attivo fortemente consolidato nel corpo e nella struttura biologica dell’individuo.

In particolare, seguendo questo modello, alla base della conoscenza matematica non ci sono assiomi e dimostrazioni, ma schemi-immagine, frame semantici[17] e metafore concettuali[18], che rappresentano elementi di utilizzo usuale nella scienza cognitiva.

Si apre così la strada a una scienza cognitiva della matematica, intesa come disciplina che studia i meccanismi cognitivi usati nella creazione e nella concettualizzazione umana della matematica[19].

---

[14] Berthoz, nel suo lavoro *la semplessità,* 2011, delineerà le proprietà del paradigma della semplessità. Tra queste: la differenziazione e la modularità, l’anticipazione, la rapidità, l’affidabilità, la flessibilità, la memoria e la generalizzazione.

[15] Rafael E. Núñez è professore di scienze cognitive all'Università della California, San Diego.

[16] George Lakoff è un linguista statunitense, professore di linguistica cognitiva all'Università della California a Berkeley.

[17] Frame è un termine tecnico che, di norma, si utilizza nella dicitura in lingua inglese, senza traduzione, con il significato di quadro di riferimento dotato di struttura.

[18] Le metafore concettuali rendono la matematica molto ricca, ma possono determinare apparenti paradossi, se non sono chiarite oppure sono considerate come verità in senso letterale.

[19] Zudini V., *cit,* p.48.

Le idee matematiche, nell’analisi cognitiva della loro struttura, sono radicate nell’esperienza della vita fisica quotidiana; pertanto, anche un matematico professionista, sia nell’esposizione che nella risoluzione di un problema, usa metafore della vita quotidiana e gesti che evocano esperienze corporee.

Il gesto è tipico anche della comunicazione dei non esperti quando risolvono un problema, dato che può sostituire una parola ancora non conosciuta. I gesti a volte consentono di eliminare una parte dello sforzo cognitivo necessario per produrre e comprendere rappresentazioni astratte e complesse.

Dunque, l’avvaloramento del corpo in atto quale presupposto per la costruzione della conoscenza, consente di aprire nuovi orizzonti alla didattica, identificabili nel riconoscimento della dimensione cognitiva del senso del movimento e nelle diverse possibilità applicative delle azioni compiute dal corpo.

1.3.2 VYGOTSKIJ-LA MEDIAZIONE SEMIOTICA

Relativamente alla genesi del gesto, nei primi anni del XX secolo, è diventata famosa l’analisi compiuta da Vygotskij.

Secondo Vygotskij il linguaggio e l’uso di segni sono incorporati in qualsiasi azione producendo una trasformazione e una riorganizzazione dell’azione stessa. Il segno svolge una funzione da mediatore tra l’individuo ed il suo contesto permettendo il passaggio tra l’interpsicologico e l’intrapsicologico, assicurando la ricostruzione interna dell’azione, ovvero, della sua internalizzazione.

In relazione all’apparizione del gesto Vygotskij afferma che:

«Al principio, questo cenno non è nulla più che un tentativo fallito di raggiungere qualcosa, un movimento diretto verso un certo oggetto che designa l'attività futura […] Quando la madre accorre in aiuto del piccolo e si dà conto che il suo movimento sta indicando qualche cosa, la situazione cambia radicalmente. Il fatto di segnalare si converte in un gesto per gli altri […] Solo più tardi, quando il bambino è capace di porre in relazione il suo movimento fallito di afferrare con la situazione oggettiva, come un tutto, comincia ad interpretare questo movimento come atto di segnalare […] Come conseguenza di questo cambio, il movimento stesso resta semplificato, e quel che risulta di esso è quella forma di segnalare che chiamiamo gesto[20].»

La mediazione semiotica tra processi interni ed esterni di un bambino esercitata da quei segni-rappresentazioni riconosciuti come risonanti avvia un processo di interiorizzazione della conoscenza posseduta da quest'ultimi.

Infatti, l'accesso alle idee fisiche o matematiche non esiste senza delle rappresentazioni come la manipolazione di materiale concreto, rappresentazioni iconiche e rappresentazioni simboliche.

In generale, quando l'attività del soggetto implica l'uso di oggetti manipolabili (artefatti) si assiste ad una esplosione dell'attività gestuale che imita i gesti visti compiere. Altri segni di natura grafica o verbale sono prodotti ed introdotti intenzionalmente quando inizia l'attività educativa da parte dell'insegnante.

[20] Vygotskij L.S., *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, 1988, pp. 92-93.

Il ruolo principale di un insegnante di matematica è rendere il sapere accessibile ai suoi studenti; questa missione educativa può essere raggiunta utilizzando vari mezzi e strumenti manipolativi[21].

Seguendo Vygotskij, strumenti e segni sono prodotti culturali e parte integrante dell'attività sociale nella quale si espleta il loro funzionamento. Assumendo una prospettiva semiotica è possibile analizzare il discorso che si sviluppa nella classe, evidenziando specifici schemi di azione messi in atto dall'insegnante al fine di far evolvere i significati personali degli studenti verso i significati matematici, che sono l'obiettivo dell'intervento didattico.

L'identificazione del potenziale semiotico di un dato artefatto costituisce l'antefatto necessario al suo utilizzo in classe; l'efficacia del suo utilizzo dipende da un'opportuna organizzazione didattica della sequenza di possibili compiti, accompagnata da un'appropriata gestione delle attività in classe da parte del docente. L'intera struttura di una sequenza didattica può essere delineata come l'iterazione di cicli didattici.

Assumere una prospettiva semiotica significa, dunque, focalizzarsi sulla produzione di segni e sul processo di trasformazione di quest'ultimi, considerandola come una evidenza dell'apprendimento.

In didattica della Fisica o della Matematica, il processo di mediazione semiotica consiste nell'evoluzione che parte dall'emergere di significati personali relativi alla risoluzione di un compito, compiendosi nella costruzione collettiva di segni condivisi relativi sia all'utilizzo dell'artefatto, sia alla matematica da apprendere.

[21] Maffia A., Mariotti M.A., *From using artefacts to mathematical meanings: the teacher's role in the semiotic mediation process*, in "Didattica della Matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula", 2018, p.50.

Tuttavia, alcuni studiosi non condividevano il pensiero di Vygotskij; tra questi, un ruolo di spicco è assunto dallo psicologo Piaget.

1.3.3 PIAGET

A differenza di Vygotskij, Piaget riteneva che lo sviluppo delle attività cognitive di un bambino segua delle tappe solo biologiche e non influenzate da fattori culturali.

Lo sviluppo, secondo lo psicologo, non è un processo continuo omogeneo o un accumulo casuale di progressi, bensì un processo altamente strutturato caratterizzato da diversi stadi[22] di livello. In questi stadi, si suppone che un numero di azioni o operazioni cognitive raggiungano un punto di equilibrio. Questo equilibrio è imperfetto, dato che viene comunque disturbato per condurre, attraverso una fase di transizione, ad un livello più alto di equilibrio.

Questo processo chiamato "equilibrazione" consente di implementare conoscenze e di apprendere nuove strutture cognitive sempre più dettagliate della realtà. Se dovesse sopraggiungere una nuova informazione, non contemplata all'interno degli schemi esistenti, si crea una sorta di disequilibrio.

A questo punto il bambino prova a individuare un nuovo equilibrio modificando gli schemi cognitivi già esistenti incorporando le nuove conoscenze acquisite.

Piaget riteneva che il bambino venisse al mondo senza alcuna idea preconcetta e che le idee logiche e matematiche si costruiscano nel tempo mediante l'osservazione e l'interiorizzazione delle regolarità del mondo.

[22] Piaget suddivide lo sviluppo cognitivo del bambino in quattro stadi e il completamento di ognuno è imprescindibile affinché possa evolvere quello successivo. Dalla nascita ai due anni circa si è nello stadio senso-motorio; dai due ai sette anni nello stadio preoperatorio; dai sette ai dodici anni nello stadio operatorio concreto; dai dodici anni a tutta l'età adulta nello stadio operatorio formale.

Nei primi anni di vita, il bambino si trova in una fase detta "senso motoria" nella quale esplora il mondo circostante attraverso i sensi ed il controllo del gesto.

Sarà solo nel terzo stadio ("operatorio concreto") che il bambino sarà capace di compiere delle operazioni mentali di una certa complessità; sarà in grado di eseguire una serie di operazioni logiche, ma concrete, quali sommare, sottrarre, dividere, classificare, seriare, uguagliare e mettere in corrispondenza.

Altre osservazioni fatte da Piaget sembrano indicare che il concetto di numero non venga compreso prima dei quattro o cinque anni. Tutto ciò fu dimostrato da numerose osservazioni svolte dallo studioso e i suoi collaboratori.

In particolare, si comincia col mettere i bambini davanti a una fila di sei bicchieri e una fila di sei bottiglie in correlazione tra loro; quando viene posta la domanda se ci sono più bicchieri o più bottiglie, i bambini finiscono per dire che "ce ne sono lo stesso". È evidente che la loro convinzione si basa apparentemente sulla corrispondenza tra gli oggetti delle due file.

A questo punto, gli osservatori, distanziano i bicchieri in modo che la loro fila risulti molto più lunga di quella delle bottiglie lasciando, ovviamente, il numero invariato. Allora, se si ripete ai bambini la medesima domanda, rispondono sistematicamente che ci sono più bicchieri che bottiglie. Evidentemente non si rendono conto che il numero non cambiava a variare la disposizione degli oggetti[23].

L'influenza dei lavori di Piaget è stata, ed è tuttora, considerevole. Le sue conclusioni hanno spinto gli educatori a ritenere che l'ascesa regolare attraverso gli stadi piagetiani

[23] Dehaene S., *Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi*, traduzione di Vesentini Ottolenghi V.L., 2000, p.47.

sarebbero immutabili. Egli sostiene che prima dei sei o sette anni i bambini non sono pronti per imparare l'aritmetica.

1.4. REPERTORIO INNATO RISPETTO LA NUMEROSITÀ

Alcuni studi hanno dimostrato che Piaget e i suoi colleghi si erano sbagliati. Gli esperimenti effettuati da quest'ultimi sono viziati e non permettono ai bambini piccoli di dimostrare quello di cui sono realmente capaci. Il difetto più grande degli esperimenti di Piaget risiede nella non comprensione da parte del bambino delle domande che gli vengono poste.

È chiaro che i bambini piccoli hanno molto da imparare e che sono necessari anni perché le loro capacità concettuali si approfondiscano, ma questo non significa che siano privi di capacità numeriche prima di iniziare la scuola materna[24].

La cognizione matematica è un tema molto discusso nelle attuali scienze cognitive; l'obiettivo delle ricerche in quest'ambito è quello di svelare quali processi cognitivi sottendano le "nostre" competenze matematiche, ovvero in che modo la matematica abbia potuto svilupparsi a partire dalle nostre capacità più spontanee, in particolare dalla percezione. È evidente che le scienze cognitive non sono la prima e l'unica disciplina a porsi domande sull'origine e sulle caratteristiche di tali capacità.

La loro prima fonte di evidenza scientifica è l'etologia e lo studio della cognizione in animali.

[24]Dehaene S, *ivi*, p.48.

L’individuazione della presenza di alcune abilità cognitive specifiche e complesse nei nostri precursori evolutivi, nonché in altri animali, fornirebbe prove a favore della determinazione biologica di queste abilità che si scoprono comuni a specie differenti.

Gli animali non sono certo in grado di parlare, eppure mostrano di possedere alcune capacità matematiche di base[25].

Oggi sappiamo che i ratti, come numerosi altri animali, prestano attenzione a quantità numeriche di qualsiasi tipo, sia che si tratti del numero di azioni, dei suoni, di lampi luminosi, di bocconi di cibo.

Un esperimento molto interessante di E.J. Capaldi e D.J. Miller ha dimostrato che, quando i ratti ricevono ricompense di due tipi, memorizzano allo stesso tempo tre tipi d’informazioni: non solo il numero di chicchi d’uva ed i cereali che hanno mangiato, ma anche il numero totale di tentativi premiati.

L'aritmetica nel mondo animale è una facoltà molto diffusa:

- i procioni possono essere addestrati a discriminare mucchi di tre chicchi d’uva rispetto a quelli di due o quattro chicchi;
- i canarini possono essere condizionati a scegliere la quinta pastiglia incontrata nell’esplorazione di una serie di gabbie;
- i piccioni sembrano essere in grado di distinguere tra quarantacinque e cinquantaquattro beccate;
- gli scimpanzé mostrano la capacità di rappresentare quantità frazionarie; e quella di scegliere il vassoio con la maggior quantità di pezzetti di cioccolata indipendentemente dal modo in cui questi sono distribuiti in due distinti mucchi;

[25]Graziani P., Grimaldi G., Sangoi M., *Animali razionali. Studi sui confini e sulle possibilità della razionalità*, in “Isonomia” online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo", 2015, pp.88-89.

- lo scoiattolo che osserva che su un albero di nocciolo ci sono solo due frutti su un ramo, mentre ce ne sono tre su un altro, e che andando su quello nel quale ce ne sono tre avrà più possibilità di superare l'inverno.

Senza dubbio, i risultati mostrano che la capacità di distinguere tra numerosità è rilevante per la sopravvivenza, esattamente come lo è il riconoscimento di altre caratteristiche dell’ambiente, che si tratti di colori o di forme.

Si possono quindi rintracciare delle ragioni evolutive per lo sviluppo di queste capacità, che permette agli animali di distinguere dove si trova una quantità maggiore di cibo.

1.4.1 DEHAENE - LA METAFORA DELL’ACCUMULATORE

Una teoria che permette di comprendere in modo semplice come sia possibile contare senza parlare è la metafora dell’accumulatore, sviluppata da Dehaene. Infatti, molti filosofi ritengono che sia impossibile contare o eseguire calcoli senza possedere competenze linguistiche.

Dehaene si servirà di una metafora idraulica per dimostrare le capacità aritmetiche degli animali. Si immaginò Robinson Crusoe su un’isola deserta, senza risorse, il quale per poter “accumulare” dell’acqua scavò nel tronco di un albero un recipiente.

Questo strumento rudimentale fu anche utilizzato da Robinson per tenere conto del numero di assalitori (i cannibali), versando per ciascuno di essi una quantità d’acqua. Segnando sull’”accumulatore” il livello finale raggiunto, Robinson potè mantenere in memoria il numero dei cannibali sbarcati.

Nel momento in cui Robinson conterà effettivamente il numero di assalitori che sono sbarcati e che sono andati via, si renderà conto che quel sistema ha un grandissimo limite.

I livelli d’acqua, essendo delle quantità continue, non possono essere rappresentati dai numeri, che formano un insieme *discreto*. Per tener traccia di quanti cannibali siano sbarcati avrebbe potuto utilizzare un altro sistema, come un sasso, che gli rappresentasse in maniera discreta e precisa il numero reale degli assalitori.

Tale metafora ci permette di mettere in evidenzia come il sistema nervoso di alcuni animali non sia in grado di contare con dati discreti, in quanto essi non riescono a tener memoria di ogni elemento contato. L' accumulatore, invece, permette all' animale di valutare quanto numerosi siano gli eventi, ma non di calcolarne il numero esatto; si parla quindi di un’aritmetica approssimativa.

Dehaene definisce il modello dell’accumulatore come:

> «[…] un modello matematico, che, una volta espresso sotto forma di equazione, predice con esattezza le variazioni dei comportamenti animali in funzione della grandezza dei numeri e la distanza che li separa[26].»

Dunque, si può concludere che gli animali sono in grado contare, anche se il conto è vago. In ogni caso, indipendentemente dalle capacità linguistiche degli animali, questi posseggono una “sensibilità alla numerosità” che permette loro di comprendere delle quantità numeriche.

Come gli animali, anche l’uomo sin dai primi mesi di vita possiede l’intuizione dei numeri. In particolare, i bambini senza un’educazione esplicita riescono ad effettuare spontaneamente stime, addizioni, sottrazioni, e calcoli, ma, a differenza degli animali questi riescono contare servendosi delle parole numero per indicare ciascun oggetto.

---

[26] Dehaene S., i*vi*, p.33.

Inoltre, secondo Dehaene, esiste un'omologia tra le abilità dei processi numerici di animali, bambini e adulti che egli suddivide nell'effetto *grandezza* e nell'*effetto distanza*.

L'*effetto grandezza* consiste in un aumento di percentuale d'errore nel momento in cui aumenta l'estensione numerica delle quantità a confronto coinvolte. Ad esempio, si sbaglia meno avendo quaranta e settantatré oggetti a confronto, rispetto a cinquecento diciotto e cinquecento sessantatré.

Nell'*effetto distanza* il riconoscimento di quantità appare più impreciso se vi sono due numerosità ravvicinate. In altre parole, è più facile distinguere due numeri lontani tra di loro come ottanta e cento piuttosto che due numeri vicini come ottantuno e ottantadue.

In conclusione, il cervello umano tratta in maniera diversa gli insiemi contenenti al massimo tre elementi rispetto a quelli più grandi (*subitizing*).

Quando si chiede a soggetti adulti di indicare il numero dei punti disposti a caso in un'immagine mostrata loro, il tempo che impiegano per rispondere è quasi identico al caso in cui vi sono uno o due punti. Oltre il tre, tuttavia, il tempo richiesto comincia ad aumentare rapidamente. Al crescere del numero dei punti, cresce anche quello degli errori. La percezione della quantità per i numeri fino a tre è istantanea; non si conta ma se ne percepisce immediatamente la presenza. Si verifica la cosiddetta *subitizzazione*.

Questi nuovi risultati sperimentali dimostrano che il cervello del bambino, al momento della nascita, non è una pagina bianca come asserivano i costruttivisti, i quali ritenevano che l'insegnamento precoce del numero potesse essere dannoso in quanto il bambino non ne comprende il significato.

Per contro, per Dehaene «il cervello del bambino non è una spugna, ma un organo già strutturato che impara soltanto ciò che è in risonanza con le sue conoscenze precedenti[27].»

---

[27] Dehaene S., *ivi*, p.260.

1.4.2 LE PRECOCI COMPETENZE NUMERICHE NEI BAMBINI

Ritornando alle scienze cognitive, le quali hanno svolto degli studi non solo sulla cognizione animale dimostrando come quest'ultimi posseggano il "senso del numero", ma anche sui neonati e i bambini prescolari.

Un'evidenza comportamentale fornirebbe delle prove a favore della comparsa precoce di certe capacità rispetto a un dominio di problemi particolari.

Nel 1954 T. Dantzig affermava che l'uomo fin dai primi mesi di vita possiede una facoltà che gli permette di riconoscere i mutamenti in una piccola collezione di oggetti. Nel primo periodo di vita i bambini riescono a individuare la costanza degli oggetti in movimento e a ricavarne il numero, sanno che lo stesso oggetto non può occupare simultaneamente posizioni diverse, che due oggetti non possono occupare la stessa posizione e che la traiettoria spaziotemporale di un oggetto è continua.

Un esperimento molto significativo dei primi anni Novanta, che attesta ciò che affermava Dantzing, coinvolge bambini di quattro mesi e mezzo. Secondo K. Wynn, questa sperimentazione dimostrerebbe che già a pochi mesi i neonati sono in grado di estrarre dall'ambiente informazioni relative alla numerosità.

La prova consiste nel far osservare ad alcuni neonati un teatrino di burattini. Inizialmente il teatrino era vuoto; la mano dello sperimentatore spuntava da un lato e collocava un burattino sulla scena, poi veniva fatto salire uno schermo che lo nascondeva; la mano riappariva per la seconda volta con un burattino identico a quello di pima che veniva collocato dietro lo schermo. A questo punto lo schermo veniva abbassato per mostrare i burattini, ma il bambino osservava un risultato inatteso, sulla scesa c'era solo un burattino.

La psicologa ripeteva la procedura diverse volte di seguito, in alcune di queste però, una volta abbassato lo schermo c'erano due burattini sulla scena. L'assunzione metodologica in questo esperimento, avente come soggetti neonati, è il tempo di fissazione dello sguardo sulla scena. I neonati che la osservavano più a lungo, dimostravano di essere sorpresi da quello che vedono, in quanto violava le loro aspettative.

I risultati mostrano che in effetti i neonati guardano sistematicamente più a lungo il risultato scorretto (1+1=1) rispetto a quello corretto (1+1=2), indipendentemente da altri cambiamenti nell'oggetto in altre proprietà di controllo, come la loro forma o il loro colore.

Tuttavia, le esperienze di Wynn non permettono di sapere fino a che punto le conoscenze aritmetiche di un bambino piccolo siano astratte[28].

Un'altra fonte di evidenza, delle scienze cognitive, è l'antropologia cognitiva e lo studio di popolazioni che non sono dotate di scrittura e/o che utilizzano una lingua più povera di quella propria alla nostra comunità e ad altre comunità analoghe.

C'è un consenso crescente nel campo sia della cognizione numerica che numerica primitiva nelle capacità di enumerare accuratamente piccole quantità fino a circa tre articoli, con requisiti di elaborazione minimi. Senza conteggio palese gli esseri umani e altri animali possiedono una procedura analogica, per cui numerano le quantità con un grado limitato di accuratezza.

Molti ricercatori ritengono che la stima di grandi numeri, sebbene basata su elementi individuati, sia unita in un formato analogico *continuo* per la rappresentazione mentale. Ad esempio, la fila di elementi discreti di una matrice di numeri grandi potrebbe essere rappresentata come una lunghezza continua di una linea, dove una linea più lunga

---

[28] Dehaene S., *ivi*, p.61.

rappresenta inesattamente una numerosità maggiore. Quando le persone usano questa procedura di stima analogica, la variabilità delle loro stime tende ad aumentare all'aumentare della dimensione del target set.

Uno studio molto interessante fu quello P. Gordon, il quale per due anni osservò e fece delle sperimentazioni in una popolazione chiamata Piraha[29]. Il sistema di conteggio dei Piraha è composto dalle parole: Bone (uno) e Btwo (due). Quantità maggiori sono designati come Bbaagi o Baibai (molti); quindi, utilizzano un sistema di conteggio "uno-due molti"[30].

I risultati di questi studi dimostrano che il loro sistema di conteggio impoverito limita la loro capacità di enumerare quantità esatte quando le dimensioni impostate superano due o tre elementi. Per le attività che richiedevano un'elaborazione cognitiva aggiuntiva le prestazioni addirittura peggioravano su un set di dimensioni inferiori a tre.

Gordon ne deduce che i Piraha ereditino solo le capacità per enumerare esattamente piccoli insiemi di meno di tre elementi, fornendo anche una finestra su come la possibile innata distinzione tra quantificare piccoli e grandi insiemi di oggetti sia relativamente non elaborata in una vita senza parole numeriche per catturare quelle esatte magnitudini[31].

Per chiarire la relazione tra linguaggio e aritmetica, un gruppo di quattro ricercatori ha osservato la cognizione numerica nei parlanti di Munduruku[32], una lingua amazzonica con un lessico numerico non oltre il cinque. Nonostante ciò, loro sono in grado di

---

[29] I Piraha vivono lungo le rive del fiume Maici nella regione di pianura dell'Amazzonia del Brasile. Essi vivono prevalentemente di caccia e agricoltura e rifiutano l'assimilazione nella cultura tradizionale brasiliana. Loro hanno una popolazione di meno di 200 abitanti divisi in piccoli villaggi da dieci a venti persone.

[30] «Members of the Piraha tribe use a ‘‘one-two-many’’ system of counting.», Gordon P., *Numerical Cognition WithoutWords: Evidence from Amazonia*, in “Science” vol.306, 2004, p.496.

[31] Gordon P., *ivi*, pp.498-499.

[32] Lingua della famiglia Tupi, parlato da circa 7000 persone che vivono in un territorio autonomo Parà stato del Brasile.

confrontare e raggiungere grandi numeri approssimativi che sono ben oltre il loro intervallo di denominazione. Tuttavia, falliscono nell'aritmetica esatta con numeri più grandi di quattro o cinque. I risultati implicano una distinzione tra un sistema non verbale di approssimazione numerica e un sistema di conteggio basato sulla lingua per l'esatto numero e aritmetica[33].

Questi dati si aggiungono alle precedenti evidenze che definiscono l'approssimazione numerica una competenza base, indipendente dalla lingua e anche dalla forma preverbale di neonati e molte specie animali.

Quindi, una sofisticata competenza numerica può essere presente in assenza di un lessico ben sviluppato di parole numeriche. I risultati di diversi studi sostengono l'ipotesi che la lingua gioca un ruolo speciale nell'emergere dell'esatta aritmetica durante lo sviluppo del bambino.

Viceversa, il fatto che queste popolazioni siano capaci di trovare soluzioni a determinati compiti cognitivi, che sono conformi a quelle fornite da individui alfabetizzati, fornisce ulteriori ragioni per concludere che alcune abilità cognitive sono in effetti indipendenti dal nostro linguaggio e dalla nostra cultura.

1.5 LA MODELLIZAZIONE (MATEMATICA-SCIENZE)[34]

La modellazione è una forma di spiegazione che è caratteristica, persino definente, della scienza (Gierre, 1988). Nersessian (2008) si riferisce alle pratiche di ragionamento basate

---

[33] Dehaene S., Izard V., Lemer C., Pica P., *Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group,* in “Science” vol.306, 2004, p.499.
[34] Lehrer R., Schauble L., *What Kind of Explanation is a Model?*, 2010.

su modelli come la sottoscrizione della ricerca nelle scienze, sia nella scoperta di nuove idee scientifiche che nell'applicazione di quelle più familiari. I modelli sono analogie in cui oggetti e relazioni in un sistema, il sistema modello, vengono utilizzati come sostituti per rappresentare, prevedere ed elaborare quelli nel mondo naturale.

I modelli impiegati nella scienza scolastica sono tipicamente usati come dispositivi illustrativi per spiegare concetti agli studenti, piuttosto che come strumenti e pratiche per la costruzione di teorie scientifiche. Gli insegnanti tendono ad associare la ricerca alla comprensione e all'impiego dei metodi della scienza; la modellazione e l'indagine sono spesso considerate come imprese totalmente distinte (Windscht & Thompson, 2006).

Questi malintesi sulla natura della scienza e sulle sue implicazioni per quella scolastica possono essere in parte responsabili della generale mancanza di attenzione ai modelli nell'educazione scientifica, nonostante la sua centralità nella scienza professionale.

Tuttavia, ci sono anche altri motivi per cui il ragionamento basato su modelli non ha un ruolo più importante. La modellazione è una forma di ragionamento difficile da comprendere per i principianti. Comprendere le sfide della modellazione implica includere le radici dello sviluppo e le progressioni di questa forma di ragionamento, specialmente nei contesti di istruzione.

La matematica è un potente linguaggio di modellazione e una risorsa essenziale per perseguire indagini e spiegazioni sulla modellazione nella scienza. Sebbene questa prospettiva sembri contraddire la tipica enfasi preferita nell'educazione scientifica per l'analisi qualitativa o quantitativa, si sottolinea l’importanza del ruolo del calcolo correlato al ragionamento. Piuttosto, attraverso un vocabolario matematico ampio e potente si riesce a dare un senso alle situazioni, in modo che gli approcci qualitativi e quantitativi siano meno distinti di quanto a volte vengono rappresentati. Quindi, un repertorio di matematica, che consente a uno studente di dare un senso al mondo, si estende ben oltre la consueta attenzione all'aritmetica nella scuola elementare.

Di conseguenza, un'istruzione matematica deve includere istruzioni appropriate in materia di spazio e geometria, misurazioni, dati e incertezza. Queste idee hanno la loro integrità e struttura e richiedono di per sé uno sviluppo ponderato.

La modellazione è un genere di ragionamento piuttosto indiretto e poco familiare rispetto alla matematica, e non solo per i bambini. Se si considera per un momento: perché qualcuno dovrebbe rappresentare i corpi come masse puntiformi? Cosa c'entra un piano inclinato con gli oggetti che cadono? Questa è una forma piuttosto strana di epistemologia, vale a dire, cercare di capire il mondo disponendone una versione semplificata e quindi studiando il modello, piuttosto che indagare direttamente il fenomeno di interesse. Il ragionamento basato su modelli comporta il distogliere deliberatamente l'attenzione dall'oggetto di studio per costruire una rappresentazione che sostituisca quel fenomeno, incapsulando e migliorando i suoi oggetti e relazioni teoricamente importanti.

La modellazione, quindi, è un modo di pensare piuttosto specializzato e pone sfide didattiche uniche. Una sfida che è tipicamente elusa nella scienza scolastica è la costruzione delle condizioni per vedere attraverso materiali, confronti, schemi di osservazione, esperimenti e/o strumenti. Raramente gli studenti delle scuole ricevono molte opportunità di partecipare a questa fase "critica", in quanto gli insegnanti hanno timore di incorrere negli "errori" dei propri alunni.

Pickering (1995) sottolinea che la costruzione di situazioni, macchine e materiali per investigare il mondo è un elemento determinante della pratica scientifica. Pickering si riferisce a questa attività come al raggiungimento di una *"mechanic grip on the world"*, una frase che evoca la lotta che ne deriva quando gli scienziati cercano di combattere il mondo naturale in una posizione in cui possono studiarlo efficacemente. Gli scienziati sfruttano le macchine e le relative forme di materiale per perseguire strade di indagine. Inoltre, Pickering descrive la scienza come un processo di stabilizzazione interattiva, che forma una dialettica di resistenza (per natura) e accomodamento (da parte degli umani).

Sfortunatamente, la scienza scolastica a tutti i livelli resiste a impegnarsi con questa intersezione tra il mondo concettuale e quello materiale. Tutti gli studenti sanno cosa si dovrebbe "vedere", in quanto sono dotati di apparecchiature e le loro esperienze sono preordinate in esercizi di laboratorio. Le macchine e il materiale sono utilizzati come semplici strumenti posizionati come di routine e trasparenti, e la storia della stabilizzazione interattiva viene cancellata. Forse per questo si sa poco sulla capacità dei giovani di impegnarsi nella formulazione delle domande e delle condizioni per l'indagine. Al contrario, e coerentemente con il focus sulla modellazione, ci si aspetta che gli studenti facciano domande, creino e rivedano sistemi di indagine, costruiscano rappresentazioni dei dati che siano convincenti per altri ricercatori e decidano quali conclusioni sono giustificate.

Di conseguenza, l'istruzione deve essere progettata in modo che gli studenti abbiano l'opportunità di inventare e rivedere modelli, o altrimenti impegnarsi in quello che Lesh e Doerr (2003) chiamano un ciclo di modellazione. L'enfasi didattica sulla variabilità dei mezzi e delle soluzioni fornisce agli studenti un forum pratico per considerare le proprie conoscenze o idee come potenzialmente inesatte e subordinate all'evidenza. L'idea stessa di evidenza presume che l'osservatore sia pronto a "mettere tra parentesi" la sua teoria o interpretazione, separatamente dalle prove che la supportano o la disconfermino, e valutare le relazioni tra credenza ed evidenza.

Per questo, è molto probabile che gli studenti imparino ad aspettarsi che i problemi evochino una varietà di modelli e forme rappresentative, e per questo sono regolarmente tenuti a giustificare le loro affermazioni contro altre rivendicazioni rivali.

Inizialmente, gli studenti non capiranno nemmeno la relazione logica tra le domande poste e la raccolta dei dati; le due attività sono facilmente interpretabili come routine scolastiche non correlate. Senza l'assistenza degli insegnanti, gli studenti possono non riuscire a sostenere le catene di ragionamento estese che collegano domande, sviluppo di materiali e/o programmi di osservazione, schemi e attività di raccolta dati, struttura e rappresentazioni dei dati e conclusioni.

Inoltre, devono capire che ci si aspetta che basino le proprie idee su quelle degli altri nel loro discorso, piuttosto che impegnarsi in quel tipo di monologo collettivo (ad esempio, il tuo turno, il mio turno, il prossimo turno) che è spesso apprezzato nelle scuole. Oltre a queste caratteristiche generali dell'interazione in classe, gli insegnanti potrebbero aver bisogno di riflettere esplicitamente su norme disciplinari specifiche.

Gli psicologi dello sviluppo potrebbero essere inclini a considerare che l'emergere di una teoria della mente è quasi certamente centrale per la capacità dei bambini di "mettere tra parentesi" le loro conoscenze e di considerarle ipotetiche, cioè confermabili o ritrattabili in relazione a un corpo di prove.

Infine, possiamo affermare che la modellazione è una forma di argomentazione centrale per la scienza e che possiede diversi vantaggi didattici: rende il pensiero degli studenti visibile agli insegnanti e ai colleghi, promuove la competenza rappresentativa e migliora il *bootstrap* tra il senso matematico e scientifico.

Tuttavia, il raggiungimento di questi dipende dal fatto che gli studenti affrontino una serie di sfide per entrare nel *"gioco del modellismo"* e che gli insegnanti identifichino e implementino norme, routine e strutture di attività che aiutino gli studenti a costruire e a mantenere le relazioni di tutte le parti della catena di modellizzazione, dalle domande alle conclusioni e viceversa. I docenti devono trovare modi per incoraggiare gli studenti a sviluppare e utilizzare criteri ponderati per valutare l'interesse e la fecondità delle domande scientifiche e per decidere se le prove sono affidabili e possono essere accettate a sostegno delle affermazioni che accompagnano.

È opportuno, in questo caso, per concludere, ricordare l’interdipendenza tra spiegazione (in questo caso, modellazione come forma di spiegazione) e insegnamento efficace.

CAPITOLO II: NUMERI, PENSIERO SPAZIALE, GEOMETRIA E MISURA

2.1. SISTEMI DI NUMERAZIONE

Un sistema di numerazione è un modo di esprimere e rappresentare i numeri attraverso un insieme di simboli. A partire dalle popolazioni primitive sono stati adottati diversi sistemi di numerazione (additivo, sottrattivo, moltiplicativo, ibrido), fino a giungere ai nostri tempi in cui si è diffuso il sistema di numerazione posizionale.

La situazione che si è presentata ai tempi degli uomini delle caverne, o prima ancora, è, in un certo qual modo, analoga a quella che avviene oggi per un bambino. Infatti, il contare è un fatto che a noi sembra, oggi, del tutto istintivo, ma vi fu un tempo in cui l'essere umano non sapeva contare, n'è immaginava che si potesse fare o che avesse un senso.

Pensando alla nozione di numero viene spontaneo porre le seguenti domande: come, quando, dove e perché l'uomo ha iniziato a concepire i numeri?

G.G. Joseph, un matematico africano di origine indiana specializzato in storia della matematica, afferma che:

«Per quanto è dato sapere, non è mai esistita una società che non abbia utilizzato qualche forma di conteggio o di riscontro (che non abbia ciò accompagnato una raccolta di oggetti con gruppi di segni facilmente manipolabili, quali pietre, nodi, o intagli su legno o su ossa). Se definiamo la Matematica come un'attività che scaturisce da concetti relativi a configurazioni numeriche o spaziali ovvero contribuisce a generarli e li impiega in connessione con qualche forma di logica, possiamo legittimamente includere nel nostro studio la proto-matematica, che esisteva quando non erano ancora disponibili forme di registrazione scritta[35]».

Lo sviluppo del concetto di numero è stato un processo lungo e graduale, e la sua consapevolezza diventò col tempo così estesa e viva da far nascere il bisogno di esprimere tale proprietà in qualche modo. L'idea di numero è nata sicuramente da esigenze pratiche, utilitaristiche e concrete; il numero è legato in svariati modi all'oggetto che deve essere numerato, nel senso che senza oggetto non si può numerare.

Coloro che catalogavano gli utensili, le armi, i viveri dovevano tenere una qualche testimonianza degli oggetti assemblati; coloro che barattavano merci dovevano poterle valutare quantitativamente durante lo scambio. Sfruttando delle tecniche concrete come la pratica degli intagli, gli uomini primitivi riuscivano a tenere la contabilità.

Da questa esigenza di contabilità nasce forse la corrispondenza uno a uno, detta biunivoca, che permette di confrontare la numerosità di due raccolte di oggetti, senza far ricorso ad un procedimento astratto quale il conteggio, la nominalizzazione delle quantità, o la conoscenza delle quantità implicate. La corrispondenza biunivoca ha la proprietà di non tener conto della natura degli oggetti dei due insiemi considerati, compiendo così un'azione astratta che esprime una caratteristica comune alle due raccolte in questione. Questo metodo è sicuramente uno dei più antichi, le prime testimonianze archeologiche note, di tale pratica, risalgono al 35.000 - 20.000 a.C. Si tratta del ritrovamento di diverse ossa, recanti una o più serie di incisioni regolarmente separate, rintracciate prevalentemente nell'Europa occidentale. ln Cecoslovacchia è stato trovato un osso di lupo, che risale a circa 30000 anni fa, che presenta, profondamente incise,

[35]Joseph G., *C'era una volta un numero. La vera storia della matematica*, 2000.

cinquantacinque intaccature disposte in due serie: venticinque nella prima e trenta nella seconda, divise in gruppi di cinque.

Questi popoli conoscevano intuitivamente la corrispondenza biunivoca e facevano ricorso solo a gesti consecutivi consistenti nell'aggiungere o nell'eliminare una o qualcuna delle unità di un insieme iniziale. Essi non avevano quindi nessun bisogno dell'idea astratta del numero.

Un'evoluzione culturale, rispetto a procedimenti elementari come la pratica dell'intaglio e l'accumulo di sassi, è il metodo legato alle parti del corpo che non utilizzano solo il principio della corrispondenza biunivoca, ma introducono anche la nozione di successione, nella quale è presente la nozione di ordine.

Mentre prima si associava un oggetto con un altro che faceva da riferimento, ora, invece, considerando una sequenza di parti del corpo prestabilite, tale successione finisce per diventare sempre più astratta, ossia sempre meno legata a parti del corpo, ma più legata a una successione astratta.

Uno dei primi sistemi di numerazione di cui si è a conoscenza è basato sull'uno, il due e il molto. Il considerare solamente queste grandezze numeriche non è specifico solo di quel periodo storico; ancora oggi le lingue originali di diverse popolazioni ricordano questo sistema di numerazione, come i Piraha. Quindi, uno e due rappresentano i primi concetti numerici astratti intellegibili dell'essere umano, mentre il numero tre è sempre stato sinonimo di pluralità e moltitudine.

In molti altri casi, invece, ci si ferma al cinque, essendo le quantità superiori difficili da essere distinte. Accanto ai sistemi basati sul cinque, molto presente nei sistemi di numerazione, ritroviamo quelli basati sul dieci. Tale scelta, è stata condizionata, probabilmente, dal numero delle dita delle mani; quest'ultime rappresentano da sempre il più semplice metodo e strumento per contare. L’uso delle dita delle mani rappresenta ancora oggi uno strumento per iniziare a contare, per questo in molte lingue si possono riscontrare tracce di tale origine antropomorfa della facoltà di conteggio.

Tra le tecniche corporee del numero, il ricorso alle dieci dita delle mani ha quindi svolto e svolge tuttora un ruolo determinante e può essere considerata come la più semplice macchina calcolatrice impiegata da tutte le popolazioni nel corso delle ere.

Sono quindi proprio le dieci dita della mano ad aver imposto all’uomo l’idea dei raggruppamenti per insiemi di dieci, di cinque (per chi considera una sola mano), di quindici (due mani e un piede) o di venti (due mani e due piedi), ed è per questo che tali basi hanno avuto il sopravvento su tutte le altre.

Il primo sistema posizionale a basi miste (sessagesimale e decimale) che si conosca risale circa al 3000 a.C., quello dei Sumeri, che si fondava su un criterio additivo. Tale sistema fu assunto in seguito dai Babilonesi, ma si perdette, tanto che Egizi, Greci, Etruschi e Romani non ne possedettero uno. Un vero e proprio sistema numerico posizionale a base dieci fu creato in India nel 500 ed arrivò presso gli Arabi nell’800, come in Europa, mentre in Italia solo nel 1202. Un sistema numerico perfettamente posizionale a base venti, che faceva uso dello zero, fu ideato dai Maya, ma ne è incerta la data; c’è chi dice che era già presente nel IX secolo, altri lo pongono ancora prima[36].

Il sistema decimale (o sistema in base 10) è l'ingegnoso sistema usato oggi per scrivere e contare i numeri. Il sistema decimale consente di utilizzare solo le dieci cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 per scrivere qualsiasi numero di conteggio come una stringa.

[36] Lucangeli D., Sbaragli S., *Introduzione storica al concetto di cognizione numerica*, in Lucangeli D., Mammarella I.C. “Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento”, 2010.

Il sistema è chiamato così perché utilizza dieci cifre distinte e si basa su raggruppamenti ripetuti per 10. Infatti, per scrivere qualsiasi numero di conteggio, non importa quanto grande sia, si ottiene utilizzando il valore di posizione che gli dà il significato[37].

Dai risultati di molteplici ricerche in didattica della matematica, si evince che la storia evolutiva del bambino che apprende sembra ripercorrere tutta la storia dello sviluppo del concetto di numero dell'umanità tramite le varie rappresentazioni di esso.

2.2. I PRINCIPI DI CONTEGGIO (GELMAN R., GALLISTEL C.R)

Un contributo ad oggi fondamentale sulle conoscenze aritmetiche dei bambini è quello di Rochel Gelman e Charles R. Gallistel nel libro "*The child's understanding of number" (1978).* Nel loro lavoro individuano i cinque principi universali del numero, evidenziando innanzitutto come per contare siano necessarie almeno due abilità: conoscere la serie dei numeri nella forma convenzionale (da 1 a 10 o oltre), e realizzare la corrispondenza termine a termine fra numerale pronunciato e tocco (o indicazione) dell'oggetto.

Nelle prime fasi dell'apprendimento dell'aritmetica i bambini utilizzano la loro capacità di contare avvalendosi di oggetti o delle dita, che li aiutano a riflettere sui problemi aritmetici.

Il primo principio fondamentale è il *"principio uno a uno"*, che consiste nell'appaiare oggetti di uno schieramento con segni distinti, in modo tale che uno e un solo segno sia usato per ogni oggetto nello schieramento. Per seguire questo principio un bambino deve coordinare due processi: la ripartizione e l'etichettamento[38].

---

[37] Cross C.T., Woods T.A., Schweingruber H, *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity*, in "National Academies" http://www.nap.edu/catalog/12519.html, 2009, p.2-4.

[38] Bartolini Bussi M.G., *Matematica. I numeri e lo spazio,* 2008, p.58.

Con ripartizione si intende saper coordinare due processi, suddividere gli oggetti fra quelli contati e quelli da contare; l'etichettamento consiste nel trovare un'etichetta diversa per ogni oggetto. I due processi devono iniziare insieme, fermarsi insieme ed essere "in fase" durante tutto il loro uso.

Il bambino può, però, incorrere in tre diversi tipi di errori: può considerare un oggetto più di una volta o saltarne uno, può usare la stessa etichetta più di una volta o non coordinare i due processi.

Il secondo principio è il *"principio dell'ordine stabile",* le etichette devono essere ordinate seconda una sequenza stabile e perciò ripetibile. È necessario acquisire una lista ordinata di tali etichette. Gli autori si sono domandati quali difficoltà avrebbe potuto incontrare un bambino molto piccolo nell'usare questo principio; sicuramente potrebbe scegliere una serie di contrassegni non abbastanza lunga rispetto a quanto richiesto dagli elementi della serie da contare, oppure potrebbe non ricordare una lista lunga e stabile di nomi arbitrari, come quelli dei numeri.

Il terzo principio è il *"principio di cardinalità"*, secondo cui l'etichetta finale di una serie ha un significato speciale, ovvero rappresenta la proprietà numerica dell'intero insieme. Quindi, l'etichetta applicata all'oggetto finale rappresenta il numero totale degli oggetti presenti.

Il quarto principio è il *"principio d'astrazione"* e ci dice che i principi precedenti possono essere applicati a tutti gli schieramenti o collezioni di oggetti.

Infine, il quinto principio è il *"principio di irrilevanza dell'ordine";* l'ordine con cui procede l'etichettamento è irrilevante. Dato uno schieramento lineare di oggetti diversi come un gatto, un cane, un coniglio e un criceto, contare come "uno" la prima volta il cane e la seconda volta il cavallo è perfettamente la stessa cosa.

Un bambino che riesce, in modo conscio o inconscio, nell'irrilevanza dell'ordine di conteggio deve sapere che: l'oggetto contato è una "cosa" piuttosto che un "uno" o un "due" (principio di astrazione), le etichette verbali sono arbitrarie e assegnate temporaneamente agli oggetti e non appartengono agli oggetti una volta che il conteggio è finito e, ancora più importante, risulta lo stesso numero cardinale a prescindere dall'ordine del conteggio[39].

2.3. I NUMERI NATURALI

Dai principi, definiti da Gelman e Gallistel, si evince che il numero è uno strumento fondamentale per descrivere il mondo; è un'astrazione che si applica a un'ampia gamma di situazioni reali e immaginarie: cinque bambini, cinque su un dado, cinque caramelle, cinque dita, cinque anni, cinque pollici o cinque idee.

Poiché sono astratti, i numeri, sono modi incredibilmente versatili per spiegare il mondo. La comprensione di quest'ultimo e dei concetti correlati include la comprensione delle rappresentazioni di quantità e quantità relativa, facilità di conteggio e capacità di eseguire operazioni semplici.

Oggi, spesso non ce ne rendiamo conto, ma ovunque e comunque ci si guardi attorno siamo circondati dai numeri.

Il concetto di numero è una realtà estremamente complessa, esso è alla base della "matematica", infatti, quando si parla di quest'ultima la nostra mente gli associa comunemente la parola "numeri". I numeri a cui ci si riferisce, chiaramente, sono i

[39] Bartolini Bussi M.G., *ivi*, p.62.

numeri naturali, cioè quelli che servono per contare, che consiste in una pratica familiare già prima dell'inizio della scuola.

L'idea di numero è complessa e questa complessità richiede diversi punti di vista senza trascurarne né privilegiarne alcuno; gli aspetti fondamentali dei numeri naturali sono: l'aspetto *cardinale*, l'aspetto *ordinale,* l'aspetto *ricorsivo* e l'aspetto di *misura*.

2.3.1. L'ASPETTO *CARDINALE*

L'aspetto *cardinale* di un numero è considerato come l'astratto comune a una classe di insiemi equivalenti rispetto alla relazione di "equipotenza". L'approccio *cardinale* si sviluppa, dunque, attraverso l'uso della corrispondenza biunivoca per il confronto tra insiemi e la conseguente caratterizzazione di insiemi equipotenti.

Da questa prospettiva si considera il numero di oggetti contenuti in un insieme non attraverso un conteggio di questi, ma mediante un confronto con altri insiemi. Così, ad esempio, il numero *cardinale* "cinque" di un insieme viene determinato dalla corrispondenza degli elementi con il numero delle dita di una mano.

In italiano esistono alcuni termini, diversi dai numeri, che possono descrivere, in contesti particolari, la cardinalità di un insieme:

- nella musica: solo, duo o duetto, trio o terzetto…;
- nella tombola: ambo, terno, quaterna, cinquina;
- nella metrica: terzina, quartina[40].

[40] Bartolini Bussi M.G., *ivi,* p.33.

I presupposti logici che garantiscono una corretta acquisizione del concetto di numero naturale, secondo l'approccio *cardinale,* sono le attività di classificare, mettere in relazione o effettuare partizioni secondo relazioni di equivalenza.

L'acquisizione dell'aspetto *cardinale* è funzionale alla comprensione del "tanti quanti" e dell'intuizione del principio di invarianza o conservazione. Quindi, la comprensione dell'aspetto *cardinale* del numero viene raggiunta dal bambino attraverso la consapevolezza che il numero di oggetti non dipende dalla loro posizione nello spazio, dalla loro grandezza o da altre caratteristiche percettive.

Infatti, le attività che vengono svolto con i bambini, soprattutto nella scuola dell'infanzia, affinché possano ottenere dei risultati soddisfacenti, devono essere sempre realizzate con collezioni finite di oggetti, con oggetti concreti e con piccole "collezioni" di oggetti.

Molto spesso, però, negli itinerari di approccio al numero cardinale, si vedono inserite attività sugli insiemi che prevedono l'uso dei quantificatori come "uno", "pochi" e "tanti"; ciò può essere significativo sotto l'aspetto linguistico, ma scorretto dal punto di vista matematico. Gli insiemi vanno usati nel contesto di un linguaggio scientifico univoco, mentre "pochi" e "tanti" sono termini di significato soggettivo e dipendenti dal contesto.

2.3.2. L'ASPETTO *ORDINALE*

I numeri naturali sono gli elementi di un insieme finito totalmente ordinato. La concezione *ordinale* determina il numero di oggetti contenuti nell'insieme non con un confronto, ma contando "uno, due, tre, quattro, cinque", per cui l'ultimo numero pronunciato è anche il numero *cardinale* dell'insieme.

Anche in questo caso in italiano, come in altre lingue, si riservano termini particolari ai numeri ordinali: primo, secondo, terzo… decimo… centesimo… millesimo…

Inoltre, l'uso linguistico degli aggettivi ordinali è diffuso in diversi contesti e sono utilizzati dai bambini nelle gare di corsa, per indicare i piani di una casa o le istruzioni per le costruzioni.

I presupposti operativi che garantiscono un'acquisizione corretta del concetto di numero naturale, secondo l'approccio *ordinale*, sono le attività di confrontare, mettere in relazione e ordinare.

Infatti, tale "competenza" si sviluppa attraverso l'uso della relazione d'ordine, che consente di confrontare due numeri e di decidere, nel caso in cui siano diversi, quale dei due è maggiore. Quindi, le basi teoriche dell'aspetto *ordinale* dei numeri naturali sono la relazione d'ordine e il principio di induzione.

Mentre nell'aspetto *cardinale* il numero è visto sotto forma di quantità, nell'aspetto *ordinale* è visto sotto forma di sequenza ordinata. L'uso consapevole di relazioni spazio-temporali (davanti-dietro, prima-dopo) determina il controllo della relazione d'ordine e prepara alla comprensione dell'idea di successore e di predecessore.

2.3.3. L'ASPETTO *RICORSIVO*

Non va dimenticato che il numero naturale è anche collegato con il concetto di *ricorsività*. Quest'approccio si fonda sull'uso dei numeri naturali per contare e sulle regole che consentono la costruzione delle successioni. Si tratta di successioni finite ma con la possibilità di poter trovare sempre ancora un altro elemento dopo l'ultimo.

Infatti, il bambino che conta quante volte riesce a saltare a piedi uniti, quanti quadretti disegna in fila o quante volte riproduce un suono, ottiene dei risultati di ogni singola operazione. In un certo senso, quindi, contare significa sommare: ogni numero che si conta va ad aggiungere uno in più alla raccolta precedente. Naturalmente, se si conta all'indietro, si sottrae. Queste osservazioni sono essenziali per i bambini per imparare dei primi metodi al fine di risolvere i problemi di addizione e sottrazione[41].

L'abilità puramente linguistica del recitare una sequenza di parole numero è il presupposto su cui si basa la capacità di contare oggetti che, a sua volta, stimola la padronanza della sequenza delle prime parole numero e la scoperta della regola ricorsiva di generazione delle parole, che denotano i numeri più grandi (venti-due, venti-tre…).

La memorizzazione della sequenza rende pian piano la recita automatica e consente di spostare l'attenzione sulla procedura più complessa del contare oggetti. Contare oggetti significa combinare la pronuncia di una parola numero con un gesto e il gesto con un oggetto, in modo da realizzare due corrispondenze biunivoche tra parole e gesti e tra gesti e oggetti[42].

2.3.4. L'ASPETTO DI *MISURA*

Infine, un numero naturale può esprimere la quantità dei campioni di unità di *misura* in cui è suddivisa, fisicamente o idealmente, una data grandezza. Il risultato non è semplicemente un numero, ma un numero dimensionato, ovvero accompagnato dall'indicazione dell'unità di *misura*.

[41] Cross C.T., Woods T.A., Schweingruber H., *cit*, p.2-7.
[42] Bartolini Bussi M.G., *cit,* pp.37-38.

È bene ricordare che quando misuriamo non si *misura* un oggetto, ma una certa proprietà che può essere il peso, il volume o lo spessore. Quindi, non prendiamo in considerazione l'oggetto nella sua interezza, ma una particolare grandezza individuata.

Naturalmente misurare è molto più complesso che contare, di conseguenza, richiede maggiore consapevolezza da parte dei bambini e l'intervento didattico deve agire nella direzione di non disperdere o ignorare l'aspetto percettivo legato alla *misura.* Attraverso attività mirate bisogna rafforzare ed estendere tutte le operazioni mentali sottese all'attività di *misura*.

In particolare, l'itinerario di lavoro per far conseguire al bambino tale concetto è articolato in tre fasi distinte: attraverso il confronto diretto, attraverso il confronto indiretto con campioni arbitrari e attraverso il confronto indiretto con le *unità* di misura convenzionali.

In conclusione, si può osservare come tutti gli approcci che portano all'acquisizione del numero naturale non sono da intendersi come strade autonome e separate. Infatti, quando si deve rispondere alla domanda "quanti sono" è necessario contare gli oggetti (aspetto *cardinale*) e nello stesso momento in cui si contano, si vanno ordinando (aspetto *ordinale*) e nella conta si procede aggiungendo uno in più (aspetto *ricorsivo*).

2.4. IL PENSIERO SPAZIALE

Accanto al pensiero numerico una componente fondamentale della matematica è il pensiero spaziale, che ha le sue radici nelle abilità basilari che emergono presto nella vita.

Il pensiero spaziale è indispensabile per una varietà di argomenti matematici, tra cui la geometria, la misurazione e le relazioni parte-tutto[43].

Si è scoperto che tale pensiero è predittivo di risultati in matematica e scienze, fornisce un modo per concettualizzare le relazioni in un problema prima di risolverlo e aiuta a controllare le abilità verbali e matematiche complessive.

Le funzioni mentali comprese nel pensiero spaziale includono la categorizzazione di forme e oggetti e la codifica delle relazioni categoriali e metriche tra questi, ed è anche cruciale nel rappresentare le trasformazioni degli oggetti e i risultati di queste (ad esempio, rotazione, traslazione, ingrandimento e piegatura), così come i cambiamenti di prospettiva che si verificano quando ci si sposta in nuove posizioni[44].

L'uso di sistemi simbolici spaziali, inclusi linguaggio, mappe, grafici, diagrammi e strumenti, come dispositivi di misurazione, estende e perfeziona la capacità di pensare spazialmente.

Come nel caso dello sviluppo della conoscenza dei numeri, recenti ricerche hanno mostrato forti punti di partenza. In contrasto con il punto di vista di Piaget, che è in opposizione al graduale dispiegamento delle abilità spaziali nel corso dello sviluppo, prove recenti mostrano che i bambini sono in grado di codificare le informazioni spaziali su oggetti, forme, distanze, posizioni e relazioni. Questa precoce comparsa di abilità spaziali è coerente con una prospettiva evolutiva che enfatizza l'importanza adattativa della navigazione per tutte le specie mobili.

---

[43] Cross C.T., Woods T.A., Schweingruber H., "*Spatial thinking, like numerical thinking, is a fundamental component of mathematics that has its roots in foundational skills that emerge early in life. Spatial thinking is critical to a variety of mathematical topics, including geometry, measurement, and part-whole relations.", cit*, p.3-10.

[44] Cross C.T., Woods T.A., Schweingruber H., *"The mental functions encompassed by spatial thinking include categorizing shapes and objects and encoding the categorical and metric relations among shapes and objects. Spatial thinking is also crucial in representing object transformations and the outcomes of these transformations (e.g., rotation, translation, magnification, and folding) as well as perspective changes that occur as one moves to new locations"., ibid.*

Pertanto, non sorprende che la traiettoria dello sviluppo dei bambini dipenda fortemente dalle loro esperienze spazialmente rilevanti, comprese quelle che coinvolgono il linguaggio e le attività spaziali, come la costruzione di blocchi, il gioco di puzzle e l'esperienza con alcuni videogiochi come minecraft.

Tale concezione include due abilità principali: *orientamento* e *visualizzazione spaziale*.

L'orientamento spaziale implica sapere dove ci si trova e come muoversi nel mondo, è, come il numero, un dominio cognitivo fondamentale, per il quale sono presenti competenze, inclusa la capacità di cercare attivamente e selettivamente le informazioni sulla propria posizione e il loro movimento nello spazio attraverso riferimenti esterni.

La visualizzazione spaziale, invece, è la comprensione e l'esecuzione di movimenti immaginari di oggetti 2D e 3D.

L'apprendimento da parte dei bambini di termini spaziali specifici aiuta anche a evidenziare le categorie di quest'ultimi; questi includono parole di forma (ad esempio, cerchio, quadrato, triangolo, rettangolo), nonché parole che descrivono caratteristiche spaziali (ad esempio, curva, retta, linea, lato, angolo, angolo), dimensioni spaziali (ad esempio, grande, piccolo, alto, basso, largo, stretto) e le relazioni spaziali (p. es., davanti, dietro, accanto, in mezzo, sopra, sotto).

La geometria e *la misurazione* forniscono sistemi aggiuntivi e potenti per descrivere, rappresentare e comprendere il mondo; entrambi supportano molti sforzi umani, tra cui la scienza, l'ingegneria, l'arte e l'architettura. *La geometria* è lo studio delle forme e dello spazio, incluso lo spazio bidimensionale (2D) e tridimensionale (3D). *La misurazione* consiste nel determinare la dimensione di forme, oggetti, regioni, quantità di materiale o quantificare altri attributi[45].

---

[45] Cross C.T., Woods T.A., Schweingruber H., *"Geometry and measurement provide additional, powerful systems for describing, representing, and understanding the world. Both support many human endeavors, including science,*

Attraverso il loro studio i bambini possono iniziare a sviluppare modi per strutturare mentalmente gli spazi e gli oggetti che li circondano. Inoltre, forniscono un contesto per i bambini per sviluppare ulteriormente la loro capacità di ragionare matematicamente.

2.4.1 LA GEOMETRIA

Il matematico olandese Hans Freudenthal ha affermato che:

«la geometria e il pensiero spaziale sono importanti perché implicano "la presa"[…] quello spazio in cui il bambino vive, respira e si muove […] quello spazio che il bambino deve imparare a conoscere, esplorare, conquistare, per poter vivere, respirare e muoversi meglio in esso[46]».

I bambini tendono a muoversi attraverso diversi livelli di pensiero mentre apprendono le forme geometriche, hanno un'innata ed implicita capacità di riconoscerle e abbinarle. La forma è un'idea fondamentale in matematica e nello sviluppo, è il modo in cui i bambini imparano i nomi degli oggetti facilitando l'apprendimento.
Le forme che si trovano in natura, come fiori, foglie, tronchi d'albero e rocce, sono complesse, intricate e 3D piuttosto che 2D. Al contrario, le forme 2D sono più familiari in quanto studiate in geometria, come triangoli, rettangoli e cerchi, e sono concetti relativamente semplici. Rispetto alla maggior parte delle forme nel mondo naturale,

engineering, art, and architecture. Geometry is the study of shapes and space, including 2-dimensional (2D), and 3-dimensional (3D) space. Measurement is about determining the size of shapes, objects, regions, quantities of stuff, or quantifying other attributes. Through their study of geometry and measurement, children can begin to develop ways to mentally structure the spaces and objects around them.", *ivi*, p.2-7.
[46] Freudenthal H., *National Council of Teachers of Mathematics,* 1989, p. 48.

queste forme sono abbastanza facili da disegnare o creare e anche da descrivere e analizzare[47].

Sebbene le forme geometriche possano essere descritte e discusse in modo informale e ai bambini possano essere semplicemente presentati solo alcuni esempi prototipici di queste forme (per facilità di consultazione e discussione), queste hanno anche delle definizioni matematiche.

Le forme geometriche hanno parti e caratteristiche che possono essere osservate e analizzate, ed hanno tutte una "regione interna" e un "confine esterno".

Distinguere la regione interna di una forma 2D dal suo confine esterno è una base particolarmente importante per comprendere la distinzione tra il perimetro e l'area di una forma.

Ad eccezione dei cerchi, il confine esterno delle forme geometriche 2D comuni è costituito da lati diritti e, la natura di questi, nelle loro relazioni sono caratteristiche importanti di una forma. Si può fare attenzione al numero di lati, alla relativa lunghezza di questi, che possono essere tutti della stessa lunghezza o alcuni sono più lunghi di altri, e al loro punto di incontro, nel quale c'è un angolo o un vertice.

Lo studio della geometria non consiste solo nel vedere le forme come un insieme, si tratta di trovare e analizzare le loro proprietà e caratteristiche. Nello studio delle forme, l'attenzione dei bambini verrà attirata sulle loro diverse caratteristiche.

Ma da un punto di vista più avanzato, i matematici hanno reso le definizioni delle forme precisa e semplice selezionando solo alcune delle loro caratteristiche.

---

[47] Cross C.T., Woods T.A., Schweingruber H., "*Shapes found in nature, such as flowers, leaves, tree trunks, and rocks, are complex, intricate, and 3D rather than 2D. In contrast, the familiar 2D shapes studied in geometry, such as triangles, rectangles, and circles, are relatively simple. Compared with most shapes in the natural world, these shapes are relatively easy to draw or create and also to describe and analyze.", cit*, p.2-9.

Ad esempio, la definizione di un triangolo è una forma 2D con tre lati dritti, con tre vertici e tre angoli, ma questi non sono menzionati nella sua definizione. Allo stesso modo, i lati opposti in un rettangolo hanno la stessa lunghezza, ma questo non è menzionato nella definizione di rettangolo.

I bambini piccoli, tuttavia, possono osservare e descrivere queste proprietà aggiuntive delle forme. Il rettangolo non è stato costruito con l'intento esplicito di rendere i lati opposti della stessa lunghezza, eppure risulta così. Allo stesso modo, se si uniscono quattro bastoncini da un capo all'altro, per formare un quadrilatero, questi vengono scelti in modo tale che i lati opposti abbiano la stessa lunghezza e si potrà osservare che anche gli angoli opposti sono gli stessi. Sebbene la forma non sia stata costruita con l'intento esplicito di rendere uguali gli angoli opposti, risulta comunque così.

Invece, le forme geometriche semplici e comuni in 3D sono cubi, prismi, cilindri, piramidi, coni e sfere. Molti oggetti comuni sono versioni approssimative di queste forme ideali e teoriche. Ad esempio, un blocco di costruzione è un prisma rettangolare e un cappello da festa può avere la forma di un cono. Come con le forme 2D, lo studio delle forme 3D non riguarda solo queste forme e l'apprendimento dei loro nomi, ma anche trovare e analizzare le loro proprietà e caratteristiche[48].

Le forme hanno tutte una "superficie interna" e una "superficie esterna". La superficie esterna può essere composta da più parti; ad esempio, la superficie esterna di un prisma può essere costituita da rettangoli. Se la superficie esterna di una forma 3D è costituita da

---

[48] Cross C.T., Woods T.A., Schweingruber H., "*The common simple geometric 3D shapes are cubes, prisms, cylinders, pyramids, cones, and spheres. Many common objects are approximate versions of these ideal, theoretical shapes. For example, a building block is a rectangular prism, and a party hat can be in the shape of a cone. As with 2D shapes, the study of 3D shapes is not only about seeing these shapes as wholes and learning their names, but also about finding and analyzing their properties and features.*", *ivi*, p.2-10.

superfici piatte, queste sono spesso chiamate facce. Le facce sono unite lungo bordi dritti e i bordi si incontrano in punti chiamati vertici.

I bambini potrebbero osservare che alcune forme (come quel blocco di costruzione) hanno coppie di facce su lati opposti che sono uguali (congruenti), potrebbero anche osservare che alcune forme, come cilindri (come un palo o una lattina), coni (come un cappello da festa) e sfere (come una palla), hanno superfici esterne che non sono piatte.

Sebbene la superficie esterna di una forma 3D sia solitamente visibile, il dentro di solito lo si deve immaginare a meno che non si tagli la forma, questa sia fatta di plastica trasparente o sia vuota e una faccia possa essere rimossa per guardare all'interno. Un'eccezione sono le stanze, che hanno spesso (approssimativamente) la forma di un prisma rettangolare, e che si sperimentano dall'interno. Distinguere l'interno di una forma 3D dalla sua superficie esterna è una base particolarmente importante per comprendere la distinzione tra l'area della superficie e il volume di una forma.

Recenti ricerche suggeriscono che l'uso di manipolatori può aiutare i bambini a sviluppare il pensiero geometrico e spaziale. Tali esperienze tattile-cinestesiche come il corpo, il movimento e la manipolazione dei solidi geometrici, aiutano i bambini piccoli ad apprendere concetti geometrici[49].

Questi materiali per sviluppare intenzionalmente abilità e concetti specifici devono essere utilizzati nel contesto di una matematica completa e programmata. Inoltre, dall'inizio, i manipolatori dovrebbero essere usati per aiutare i bambini, anche i più piccoli, a sviluppare rappresentazioni sempre più astratte.

[49] Cross C.T., Woods T.A., Schweingruber H., "*Research suggests that the use of manipulatives can help young children develop geometric and spatial thinking (Clements and McMillen, 1996). Using a greater variety of manipulatives is beneficial (Greabell, 1978). Such tactile-kinesthetic experiences as body movement and manipulating geometric solids help young children learn geometric concepts.*", *ivi*, p.6-3.

Le immagini possono anche supportare l'apprendimento, offrendo agli studenti una comprensione immediata e intuitiva di alcune idee geometriche. A livello didattico, le immagini devono essere sufficientemente varie, in modo tale da che le stesse idee degli studenti non si formino in maniera limitata. Grazie all'esperienza, i bambini possono diventare sofisticati nell'interpretazione geometrica nelle immagini.

2.4.2 LA MISURAZIONE

Per lo sviluppo matematico dei bambini piccoli è essenziale, oltra la geometria ed il pensiero spaziale, la misurazione. La misurazione è un aspetto fondamentale della matematica, in quanto collega due aree principali di questa: la geometria e il numero; attraverso l'attaccamento del numero alle dimensioni spaziali.

Lo sviluppo delle capacità di misurazione, di solito, inizia con il confronto diretto degli oggetti lungo una dimensione. Esiste una relazione importante tra la dimensione di un'unità e il numero di unità necessarie per ottenere una determinata quantità fissa.

La misurazione stessa richiede la visualizzazione dell'attributo da misurare come composto da unità. In effetti, utilizzando un'unità di misura per suddividere una quantità continua, come una lunghezza o un'area, in pezzi discreti e di uguale dimensione, la si trasforma in una quantità numerabile.

Nella misurazione, le unità sono composte per creare unità più grandi e scomposte per creare unità più piccole, permettono di decidere qual è di più e qual è di meno in vari domini: numero, lunghezza, area.

Fare in modo che i bambini vedano e discutano le relazioni e l'ordinamento attraverso i domini può approfondire la comprensione matematica. Ampliando i modi in cui le cose possono essere confrontate, i bambini sono portati all'idea di diversi attributi misurabili.

Ad esempio, due pile di blocchi potrebbero essere create dallo stesso numero di blocchi, ma una pila potrebbe essere più alta dell'altra.

La relazione è un primo passo verso la misurazione, perché la misurazione è una forma quantificata di relazione. Infatti, una misurazione specifica quante cose (l'unità) servono per creare l'altra cosa (l'attributo misurato). Quando la relazione e il numero vengono uniti tramite la misurazione, entrambi i regni vengono estesi. Da un lato, la relazione diventa più precisa quando diventa misurazione e, dall'altro, i numeri si estendono in frazioni e decimali nel contesto della misurazione. Ad esempio, un secchio di sabbia potrebbe essere riempito con due secchi e mezzo più piccoli di sabbia.

Per i bambini piccoli, le misurazioni saranno generalmente limitate ai numeri interi, ma la misurazione è un contesto naturale in cui sorgono le frazioni[50]. Le frazioni possono essere mostrate bene nel contesto della lunghezza e sulle rette numeriche. Una linea numerica è molto simile a un righello infinitamente lungo, quindi le linee numeriche possono essere viste come misura e numero unificanti in uno spazio unidimensionale.

Un'idea importante ma sottile sulle unità, che i bambini imparano gradualmente, è che quando si misura un dato oggetto, più grande è l'unità usata per misurare, minore è il numero totale di unità. Supponiamo che ci siano due dimensioni di bastoncini da utilizzare come unità di lunghezza: bastoncini corti e bastoncini più lunghi. Per misurare la stessa lunghezza sono necessari più bastoncini corti di quelli lunghi.

In altre parole, esiste una relazione inversa tra la dimensione di un'unità di misura e il numero di unità necessarie per misurare alcune caratteristiche. I bambini piccoli possono anche non cogliere l'importanza di usare unità standard, che consentono di confrontare

[50]Cross C.T., Woods T.A., Schweingruber H., *"For young children, measurements will generally be restricted to whole numbers, but measurement is a natural context in which fractions arise."*, *ivi*, p.2-9

oggetti che sono ampiamente separati nello spazio o nel tempo. Per questo, i bambini hanno anche bisogno di opportunità per risolvere problemi di misurazione reali che può aiutarli nel costruire la loro comprensione di unità.

La prima competenza dei bambini nella misurazione è facilitata dal gioco strutturando materiali, come blocchi di unità, blocchi di modelli e piastrelle, e rafforzati grazie alle opportunità di riflettere e discutere delle loro esperienze.

2.5. PROCESSI DI RAGIONAMENTO MATEMATICO

Oltre a comprendere i concetti matematici specifici discussi finora (numero, geometria e misurazione), i bambini devono sviluppare competenze nei processi di ragionamento utilizzati in matematica. Questi processi specifici rappresentano idee potenti e trasversali che collegano più concetti, procedure o problemi e possono aiutare i bambini a iniziare a vedere la coerenza tra gli argomenti della matematica.

Uno dei principali obiettivi della prima educazione dovrebbe essere quello di stimolare e promuovere il ragionamento matematico.

Il Consiglio nazionale degli insegnanti di matematica (NCTM) ha identificato cinque standard di processi essenziali per l'apprendimento e l'insegnamento della matematica significativi e sostanziali: *rappresentazione*, *risolvere problemi*, *ragionare*, *connettere* e *comunicare*. Questi processi sono veicoli per i bambini per approfondire, estendere, elaborare e perfezionare il loro pensiero e per esplorare idee e linee di ragionamento[51].

[51] Cross C.T., Woods T.A., Schweingruber H., "*The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) identified five process standards essential for meaningful and substantive mathematics learning and teaching (National Council of Teachers of Mathematics, 2000): representing (including analyzing representations mathematically and visualizing internally), problem solving, reasoning, connecting, and communicating. These processes are vehicles for children to deepen, extend, elaborate, and refine their thinking and to explore ideas and lines of reasoning.", ivi*, p.2-12.

Durante l'insegnamento-apprendimento dei contenuti matematici questi processi devono essere continuamente intrecciati.

La *rappresentazione* è centrale in matematica, in quanto, a tutti i livelli, utilizza immagini o diagrammi semplificati per rappresentare una situazione e sottoporla ad analisi matematica.

Secondo gli educatori matematici «la risoluzione dei problemi e il ragionamento sono il cuore della matematica[52]». In effetti, la *risoluzione dei problemi* è sia un obiettivo dell'apprendimento della matematica che un meccanismo per farlo.

I bambini piccoli avranno bisogno di sostegno per formulare, comprendere e risolvere i problemi e per riflettere sul ragionamento che usano per farlo. Sviluppando la loro capacità di ragionare matematicamente, i bambini inizieranno a notare schemi o regolarità nel mondo attraverso le idee matematiche a cui vengono introdotti. Diventeranno sempre più sofisticati nella loro capacità di riconoscere e analizzare la matematica insita nel mondo che li circonda.

Le esperienze matematiche informali dei bambini, la risoluzione dei problemi, le esplorazioni e il linguaggio, forniscono le basi per la comprensione e l'utilizzo di questi insiemi fino alle notazioni matematiche formali.

Le rappresentazioni e le esperienze informali e formali devono essere continuamente collegate in una comunità di apprendimento stimolante, che fornisce opportunità a tutti i bambini di parlare del loro pensiero, producendo e migliorando il loro uso del linguaggio matematico e ordinario.

[52] National Association for the Education of Young Children e National Council of Teachers of Mathematics, 2002, p.6 di 22.

I bambini devono anche connettere idee attraverso diversi domini della matematica (ad esempio, geometria e numero), attraverso la matematica e altre materie (ad esempio, l'alfabetizzazione) e gli aspetti della vita quotidiana.

Applicare i processi matematici generali di *ragionamento, rappresentazione, risoluzione dei problemi, connessione* e *comunicazione*, sono meccanismi attraverso i quali i bambini possono andare avanti e indietro tra matematica astratta e situazioni reali nel mondo che li circonda. In altre parole, sono un mezzo sia per dare un senso alla matematica astratta sia per formulare situazioni reali in termini matematici, cioè per matematizzare le situazioni che incontrano[53].

Il potere della matematica risiede nella sua capacità di unificare un'ampia varietà di situazioni e quindi di applicare una strategia comune di risoluzione dei problemi apparentemente differenti.

Affinché i bambini possano usare questo "potere matematico", devono prendere situazioni e problemi del mondo che li circonda e riformularli in termini matematici. In altre parole, si richiede ai bambini di matematizzare tutte le situazioni.

[53]Cross C.T., Woods T.A., *"Schweingruber H., the general mathematical processes of reasoning, representing, problem solving, connecting, and communicating are mechanisms by which children can go back and forth between abstract mathematics and real situations in the world around them. In other words, they are a means both for making sense of abstract mathematics and for formulating real situations in mathematical terms—that is, for mathematizing the situations they encounter."*, *cit*, p.2-13.

CAPITOLO III: DISCRETO-CONTINUO

3.1. UNA PRIMA DEFINIZIONE: CENNI STORICI

Discreto e *continuo* sono due concetti difficili da definire; difatti entrambi i termini in campo matematico possono assumere una molteplicità di significati. È abbastanza naturale che, attraverso le grandezze geometriche, si sia avuto un primo approccio con il concetto di *continuo*, nato grazie al contatto diretto con la natura circostante. Nonostante ciò, la nostra mente gode di grandissima libertà nell'utilizzare tali concetti come "materiale base" per la costruzione di "strutture". Per questo, vi sarà l'intenzione nel cercare una descrizione in tre ambiti di ricerca: Matematico, Fisico e Filosofico.

Nell'ambito Matematico si è sempre cercato di creare un legame tra il *continuo* e il *discreto*, il primo dimostrato nelle figure dello spazio geometrico, il secondo nella successione dei numeri interi e nell'insieme dei loro rapporti.

Nell'ambito Filosofico già a partire dal IV secolo a.C. ci si ponevano delle domande sulla relazione di questi due concetti. Con Pitagora ci si avvicina al concetto del pensiero logocentrico comprovato su due opposti: il finito positivo e rassicurante in quanto misurabile e l'infinito negativo e per nulla rassicurante poiché incalcolabile. A partire da questi due rappresentazioni, durante quel periodo ci fu una prima descrizione dell'intero universo, in cui i due termini, pur in contrapposizione tra loro, riuscivano a creare un rapporto.

Sulla scia del pensiero di Pitagora, verso la fine del IV secolo a.C., si svilupperà quello di Aristotele, il quale affermava che: «ciò che non ha limite non è rappresentabile esaurientemente nel nostro pensiero, ed è perciò inconoscibile[54]».

Il suo contributo più notevole fu però quello di trovare una terminologia che potesse spiegare i due concetti. Infatti, egli affermerà che per essere "continua" una quantità dev'essere indefinitamente divisibile in parti; c'è continuità se c'è contiguità o contatto; nel continuo vi sono unità e coesione, una sorta di "unione naturale" che non si presenta, invece, nei numeri interi che rappresentano quantità separate.

Infine, in Fisica, un corpo materiale è studiato sia come corpo *discreto*, in quanto costituito da particelle distinguibili le une dalle altre, sia come corpo *continuo*, in quanto la connessione e l'interdipendenza tra queste particelle fanno sparire qualsiasi granularità, da un punto di vista macroscopico.

Ad esempio, un sistema fisico come il campo elettromagnetico[55], che apparentemente è un sistema *continuo*, è in realtà un sistema *discreto* di fotoni; anche nella meccanica dei fluidi[56] esistono dei sistemi continui rappresentati da sostanze liquide e gassose, anche se questo modello fu messo in crisi quando si scoprì che il comportamento di un gas reso incandescente è in realtà caratterizzato da uno spettro di emissione formato da un insieme discreto di numerosissime frequenze.

Sembrerebbe che l'unico sistema davvero *continuo* sia quello spazio-tempo, eppure si è dimostrato, nella teoria della Relatività Generale di Albert Einstein, che i concetti di

---

[54] Zellini P., *Breve storia dell'infinito*, 2011.

[55] In fisica è la combinazione del campo elettrico e de campo magnetico, in natura c'è una stretta relazione tra i due campi, poiché ogni variazione del primo genera una variazione dell'altro, e viceversa. Secondo le equazioni di Maxwell, un campo elettrico variabile induce un campo magnetico nello spazio circostante e un campo magnetico variabile induce un campo elettrico.

[56] In fisica, con il termine meccanica si indica una qualsiasi teoria che si occupi del movimento dei corpi. In particolare, la meccanica dei fluidi è uno specifico ramo della meccanica del continuo che studia le proprietà dei fluidi, cioè liquidi, vapori e gas.

spazio e di tempo non sono assoluti ma relativi; difatti questi dipendono dal sistema di riferimento in cui si trova l'osservatore, e costituiscono il continuum spazio-temporale con quattro dimensioni (tre dimensioni spaziali ed una temporale).

Inoltre, anche questo sistema può essere osservato con la lente d'ingrandimento che esamina le distanze spazio-temporali in termini di stringhe piccolissime e monodimensionali, che rappresentano la "granularità" dello spazio-tempo; tale concetto verrà approfondito nel corso del capitolo.

In conclusione, tali termini sono sempre trattati, indipendentemente dall'approccio preso in considerazione, come aspetti separati sebbene essi siano, nella percezione, continuamente intrecciati.

3.2. L'ARITMETICA E L'ALGEBRA TRA IL *CONTINUO* E IL *DISCRETO*

Riferendoci all'ambito Matematico il *continuo* aritmetico è caratterizzato da tre proprietà essenziali: l'ordine, la densità e la completezza. L'insieme che soddisfa questi tre requisiti è quello dei numeri reali.

La ragione principale per la quale si utilizzano tali numeri per comprendere il concetto di *continuo* aritmetico, è che essi costituiscono uno spazio "senza buchi". Di conseguenza, in particolar modo, essi sono utilizzati per lo studio delle grandezze.

Tuttavia, spesso si fa riferimento soltanto ad alcuni dei suoi sottoinsiemi; uno di questi è quello dei numeri naturali.

In quest'ottica, i numeri naturali assumono un ruolo centrale poiché utilizzati come strumento per contare, rappresentare le quantità di elementi di un insieme e, inoltre, mostrano un buon funzionamento sia in corrispondenza delle più semplici operazioni insiemistiche che dei confronti tra quantità.

Se con i numeri naturali si contano le quantità di elementi facenti parte di un insieme, con i numeri reali si misurano le grandezze; è proprio in questo che si distinguono i due sottoinsiemi.

In generale, la misurazione si usa per cogliere la grandezza di oggetti astratti, i quali per poter essere apprezzati, sono poi confrontati con grandezze di oggetti noti che si presentano in un *continuo* di possibilità, come ad esempio le lunghezze.

È possibile notare come tutte le grandezze di un certo tipo siano tra loro confrontabili, ovvero, esaminando due lunghezze può avvenire che una sia minore dell’altra, la seconda sia minore della prima oppure sono uguali.

Per *continuo* di possibilità si intende che nel passaggio da una grandezza più piccola ad una più grande se ne incontrano tante altre senza interruzioni e senza che ci siano salti; per tali ragioni sì parla di numeri reali capaci di rappresentare il *continuo*.

Questa situazione, però, appare in contrasto con la discontinuità tipica dei numeri naturali, proprio per le proprietà che li caratterizza; infatti, per ciascun numero naturale ne esiste uno maggiore, il suo immediato successore, tale per cui non ci sia altro numero naturale strettamente compreso tra i due. In questo modo, essendoci degli spazi vuoti e presentando un salto tra una grandezza e quella che la segue, i numeri naturali non possono essere considerati come un continuo di possibilità.

P. Guidoni inquadra il “problema” in una prospettiva completamente diversa. Egli afferma che:

“Discreto e continuo sono e restano, nei contesti di vita più elementari come nella speculazione più raffinata, modi di pensare direttamente e irriducibilmente antinomici (dissòi lògoi, direbbe

Protagora); ma sono al tempo stesso modi di guardare diversi che devono comunque trovare una necessaria complementarietà all'interno di "discorsi" più complessi che ne valorizzino la specificità di "presa" sul reale: modi via via "possibili" in quanto potenzialmente (parzialmente) risonanti rispetto alla struttura della strategia complessiva (cfr. il "gioco dei giochi" di Wittgenstein) via via perseguita."[57]

Per l'autore è nell'azione chiusa, in quanto percepita intera, e azione aperta, che si gioca l'antinomia tra *discreto* e *continuo* che costituiscono entrambi sorgenti indipendenti, ma interferenti della percezione della realtà.

Inoltre, egli dichiara che la nostra capacità di contare si costruisce sulla presenza di due categorie fondamentali ed irriducibili: la categoria di "individuo" e la categoria di "sostanza continua".

La categoria di "individuo" indica qualcosa (una persona o animale, un oggetto) di definito in quanto preso nella sua interezza. Infatti, per individuo si intende tutto ciò che non può essere diviso senza che perda la sua identità. È grazie a questa "identità" che si indica l'individuo come qualcosa di identificabile, riconoscibile, e per questo contabile.

A tale categoria, Guidoni, collega la nozione di *discreto*, in quanto le caratteristiche dei singoli individui permette di discernerli gli uni dagli altri.

In opposizione alla nozione di *discreto* vi è quella di *continuo*, indicata dall'autore come "sostanza continua".

[57] Guidoni P., *Cosa si conta quando si conta, cosa si moltiplica/divide quando si … : spiegare e capire – fra semantica e sintassi, fra discreto e continuo,* in stampa sugli atti del XI Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica" a Castel San Pietro Terme (Bo), 2007, p. 7.

La “sostanza” è definita come qualcosa di illimitato, che non ha confini, come la farina, l’olio, l’acqua, i quali possono essere presi o in piccole parti (con un cucchiaino) o in grandi parti (con un becher).

Per poter essere contata la “sostanza continua”, deve essere inevitabilmente discretizzata artificialmente; ciò può avvenire attraverso molteplici modi, ad esempio obbligandola ad entrare in un contenitore, dividendola in base al volume desiderato o tagliandola in parti.

L’autore sottolineerà come questa “imposizione” del *discreto* sulle sostanze risulti più complicata del previsto all’atto pratico; difatti contare gli oggetti discreti è chiaramente diverso da contare il *continuo* attraverso forme indotte culturalmente volte al discreto.

Proprio per i motivi sopra citati, nella cultura occidentale, al centro dell’apprendimento della scuola primaria si pone l’aritmetica, in quanto si tende ad introdurre i numeri naturali, per la loro natura primitiva e naturale, prima della misura.

Infatti, gli aspetti di ordinalità e cardinalità, nonché la corrispondente azione intrecciata del contare oggetti discreti, sono stati inizialmente posti in primo piano.

Tuttavia, di recente, numerose ricerche evidenziano la presenza di competenze ingenue matematiche anche nei bambini molto piccoli, ipotizzando l’esistenza di una rete più complessa tra il pensiero aritmetico ed il pensiero algebrico.

Precursore di tale orientamento è lo psicologo russo V. V. Davydov.

3.2.1 IL PENSIERO DI V. V. DAVYDOV

Davydov colloca l’esperienza di confronto e misurazione di quantità continue prima dell’introduzione del numero.

Secondo egli, un’esperienza più ampia e approfondita con diversi tipi di quantità consentirebbe ai bambini di ampliare la loro conoscenza dei numeri fin dall’inizio del loro percorso di formazione matematica. Inoltre, suggerisce che, durante i primi anni di formazione matematica, i bambini dovrebbero manipolare e trattare approfonditamente le proprietà delle quantità e l’uso del linguaggio algebrico prima di passare alla pratica con i numeri naturali.

Come sottolineato da Davydov, in una disciplina scolastica i mezzi intermedi di descrizione hanno un significato fondamentale, perché mediano tra le proprietà di un oggetto ed il concetto.

In ambito internazionale sono attivi alcuni interessanti progetti di ricerca che prendono ispirazione da questo approccio; tra i tanti rileva il progetto Measure-Up[58] (MU) sviluppato presso l’Università di Manoa (Hawaii, USA).

MU utilizza la conoscenza quotidiana della misurazione dei bambini come contesto per esplorare e sviluppare la matematica. Concetti come unità, iterazione, uguaglianza, commutatività e transitività sono introdotti per la prima volta attraverso il lavoro con quantità non numeriche di lunghezza, area, volume e massa. Ciò conduce a lavorare con la linea numerica, il raggruppamento, il valore di posizione e i numeri razionali.

L’approccio quantitativo MU vede il numero come il risultato del conteggio di oggetti, che rappresenta la relazione tra un'unità e una quantità maggiore, nonché come mezzo per documentare misure.

Il contesto di misurazione è considerato come un mezzo potente per i bambini piccoli per sviluppare la comprensione della matematica, imparare il valore del luogo e il sistema

[58]Measure Up è un programma di studi e di sviluppo per le classi elementari iniziato al CRDG (Curriculum Research & Development Group) nel 2001. Il curriculum elementare russo è stato sviluppato da V.V. Davydov e D.B. El'konin (1975a, 1975b) e tradotto successivamente in inglese. I ricercatori del CRDG hanno studiato l'adattamento e l'implementazione di questo curriculum nel contesto statunitense.

numerico. Quest'ultimo considerato non come semplice strumento di conteggio, ma come mezzo moltiplicativo che consente ai bambini la rappresentazione della grandezza nel contesto di misurazione.

Davydov, partendo da un'attività didattica di esplorazione (la stessa messa in pratica dal progetto MU), e utilizzando come strumenti le rappresentazioni visuo-spaziali, ha l'obiettivo di riconoscere le strutture indipendentemente dai numeri, così da potersi spostare verso forme simboliche più formali.

L'individuazione e riconoscimento della struttura è intesa come parte integrante dell'attività di sviluppo del pensiero algebrico, nella quale il bambino è posto in situazioni problematiche diverse e utilizza così la stessa per la risoluzione delle equazioni.

L'attività in questione consiste nel presentare tre contenitori uguali che contengono diverse quantità d'acqua, per poi chiedere ai bambini di osservare e descrivere le possibili uguaglianze e disuguaglianze presenti. L'obiettivo è quello di giungere ad una osservazione che permetta di descrivere e rappresentare graficamente tali uguaglianze e disuguaglianze tra volumi d'acqua.

In conclusione, v'è da dire che, nonostante tale ricerca risalga agli anni Cinquanta del secolo scorso, per la sua prolificità tale modello è stato rivisitato e preso in considerazione solo negli ultimi anni, ed è tutt'ora soggetta ad una attenta riconsiderazione.

3.3. LA MATERIA

Nei paragrafi precedenti si è cercato di fornire una spiegazione dei concetti di *discreto* e *continuo* in campo aritmetico ed algebrico, anche se, i due termini possono assumere molteplici significati a seconda del punto di vista dal quale si analizzano.

Nell'Antica Grecia i filosofi della natura pensavano che la varietà e la moltitudine delle sostanze conosciute avessero avuto origine da pochi elementi semplici, i quali avrebbero formato delle strutture sempre più complesse.

Secondo queste antiche concezioni sono quattro gli elementi originari: Aria, Acqua, Terra e Fuoco. Partendo da questa evidenza, nell'Antica Grecia, prima della nascita di Cristo, si svilupparono due linee di pensiero totalmente differenti.

Da una parte le teorie aristoteliche immaginavano gli elementi come una materia continua, cioè divisibile all'infinito; d'altra parte, i filosofi atomisti vedevano nella materia una continuità solo apparente ma in realtà discontinua, ovvero composta da particelle chiamate atomi.

Anche i filosofi Democrito prima, Epicuro e Lucrezio dopo, pensavano che gli atomi fossero minuscoli frammenti formati da una stessa materia, ma dotati di peso, forma, grandezza e movimenti propri.

In ogni caso, gli elementi definiti primigeni, secondo Aristotele, erano tutti composti da una materia prima ma ciascuno era dotato di una coppia di proprietà che dava una forma particolare alla sua materia[59].

Infatti, egli evidenziava che «*il fuoco, l'aria, l'acqua e la terra sono vicendevolmente trasformabili l'uno negli altri, e ciascuno è potenzialmente latente negli altri*»[60].

Per questo, secondo i filosofi della natura, gli elementi originari potevano essere "mescolati" in varie combinazioni così da comporre diverse sostanze, ottenendo delle proprietà pure.

---

[59] Arcà M., Bassino L., Degiorgi E., *Dentro la materia. Una storia di atomi, molecole, particelle,* 2008, p.14.

[60] Aristotele, *Meteorologica,* IV secolo a.C.

Sul modo con il quale venivano combinate le diverse sostanze, ci si ritroverà dinanzi a due pensieri in contrapposizione; gli studiosi, definiti alchimisti[61] che, a differenza dei filosofi della natura che cercavano di ottenere sempre delle sostanze pure, trasformavano la materia aggiungendo e rimuovendo elementi, formando sostanze conosciute e sconosciute.

Secondo le teorie alchemiche, non era importante far reagire insieme sostanze per ottenere una materia con nuove caratteristiche, quanto piuttosto dosare e combinare in maniera accurata le diverse proprietà. Essi erano convinti che le particelle di proprietà, nelle trasformazioni, si trasferivano dalla matrice a cui erano vincolate ad un'altra sostanza, la quale veniva modificata dalla nuova proprietà che a sua volta interagiva con quelle già presenti, generando una sostanza del tutto nuova.

3.3.1 LE PROPRIETÀ FISICHE E CHIMICHE

Ad oggi, grazie a numerose ricerche, si possono definire nel dettaglio quelle che sono le proprietà fisiche e chimiche della materia, le quali aiutano a comprendere non solo le diverse forme di aggregazione e trasformazioni della materia stessa, ma anche la loro composizione interna. Questa, guiderà nella comprensione delle leggi che governano la definizione di una materia continua o discontinua.

Le proprietà fisiche della materia sono le caratteristiche che si possono osservare e misurare senza alterare la composizione del sistema materiale; ad esempio, lo stato di aggregazione (solido, liquido ed aeriforme), il colore, l'odore, la densità. In una

[61] Sono da molti indicati come i precursori degli odierni chimici. Fino al XVIII secolo l'alchimia fu infatti considerata una vera e propria scienza.

trasformazione fisica la materia può cambiare forma, aspetto o stato fisico ma non modificherà la sua costituzione, ovvero la sua identità chimica.

Infatti, le trasformazioni fisiche avvengono senza alterare la composizione del sistema materiale e, quando quest'ultima presenta proprietà ben definite, prende il nome di "sostanza".

Un classico esempio di "sostanza" è l'acqua, che rappresenta al meglio i tre stati di aggregazione o transizioni di fase. Difatti, nel momento in cui moltissime molecole d'acqua si ritrovano insieme, formano la "sostanza" "acqua", e i legami intermolecolari che le tengono vicine sono di tipo elettrostatico[62]. Per questo tali molecole, pur restando unite, possono facilmente spostarsi l'una rispetto all'altra, separarsi e riagganciarsi tra loro; per queste ragioni, l'acqua in forma liquida si versa, scorre e cambia forma.

Quando però le temperature scendono al di sotto degli zero gradi, le molecole d'acqua si organizzano in maniera differente, unendosi in maniera più stabile e formando il ghiaccio solido.

Come in tutti i solidi, i legami intermolecolari sono rigidi ed hanno una forma e un volume definito e proprio; questo li rende frantumabili solo usando notevoli quantità di energia.

Al contrario, nelle sostanze gassose, le molecole sono lontane, ben distaccate l'una dall'altra. Quando l'acqua si trasforma in vapore (ad esempio, quando arriva ad ebollizione) le sue molecole si agitano termicamente fino a staccarsi dalla superficie liquida e a disperdersi nell'aria. Se le molecole vaporizzate trovassero lungo il loro percorso una superficie fredda, ad esempio il vetro o le nostre mani, le forze di attrazione intermolecolari vincerebbero l'agitazione termica delle molecole che andrebbero rallentando e subito si riaggancerebbero, formando delle gocce sempre più grandi.

[62] Si tratta di legami intermolecolari più deboli che tengono uniti gli atomi.

Alla fine di tutte queste trasformazioni, ciò che si avrà sarà sempre acqua, che, apparentemente, per citare le teorie aristoteliche, è una sostanza continua che può essere suddivisa in infinitesime parti.

Osservandola a livello microscopico, tuttavia, essa è in realtà una sostanza composta da molecole, superficialmente continua ma internamente discreta, così come affermato dalle teorie dei filosofi atomistici.

Le proprietà chimiche di una sostanza, invece, sono le proprietà legate ai cambiamenti di composizione della materia, e di fatto fanno riferimento ad un'unica caratteristica, ossia la reattività, intesa come il modo di reagire di una sostanza.

Successivamente alle reazioni chimiche si avranno, quindi, delle sostanze con proprietà fisiche e chimiche diverse.

Possono essere considerate proprietà chimiche pH, potenziale standard di riduzione, affinità elettronica, elettronegatività, energia di ionizzazione e costante acida.

Ad esempio, il legno che brucia e si "trasforma" diventando cenere; è una situazione irreversibile, in quanto la sostanza è cambiata del tutto.

3.3.2 DAL MACROSCOPICO AL MICROSCOPICO

Nel corso dei secoli la chimica si è arricchita di nuove scoperte. Sono tre le domande fondamentali che progressivamente si è posta: "come sono fatte le sostanze?", "come sono unite insieme le particelle che le compongono?", "come si trasformano le sostanze e le loro particelle?".

Ogni sostanza non è divisibile all'infinito, ma ha una struttura granulare che prende il nome di molecola (aggregazione di atomi). Ad esempio, la più piccola particella di acqua è una molecola formata da un atomo di ossigeno e due di idrogeno.

Al contrario, le particelle hanno un significato originale, etimologico, che è ad esse associato; sono considerate come una piccola parte di un sistema composito più grande.

Infatti, quando si parla della materia, concepita come continua, statica e senza spazi vuoti tra le sue parti, si fa solitamente riferimento sia alle sue proprietà facilmente osservabili (macroscopiche) che alle sue proprietà di cui il sistema stesso si compone e non visibili ad occhio nudo (microscopiche).

Nonostante il concetto di sostanza appartiene al livello macroscopico ed è quello che solitamente “emerge” rispetto a quello microscopico, sarà solo attraverso la definizione delle quantità nel modello micro che si avranno dei “comportamenti” osservabili a livello macro.

In questo senso il collegamento tra piccolo e grande avviene tramite "livelli" di quantità, definiti da quelle più specifiche e raffinate ("piccole", come la posizione di una particella) e quelle più ampie e vicine all'occhio umano ("grandi", come l’energia di una pallina che rimbalza all'interno di una stanza).

Inoltre, bisogna costruire modelli appropriati e non troppo generici di strutture e comportamenti interni che possono essere causa di ciò che appare all’esterno.

Questo legame porta ad una descrizione "più profonda" dei fenomeni, poiché sono effettuati diversi “salti” dal visibile all’invisibile, dal *continuo* percepito a un *discreto* immaginato e distante dalla nostra immediata percezione.

Nel passaggio da *discreto*, termine con il quale si intende una qualsiasi quantità di oggetti fisici la cui cardinalità è numerabile, a *continuo*, che rappresenta una singola entità fisica, riscontriamo un limite del *continuo* in quanto può far "perdere informazioni sul sistema" o addirittura portare alla divergenza di certe quantità.

In sintesi, al livello macro, la funzionalità di una struttura dipende dalla natura dei materiali (microscopici) con cui sono state costruite le parti, dalle forme di queste parti, dalle relazioni tra le parti o tra gli elementi, cioè dai modi precisi in cui questi devono essere assemblati[63].

3.3.3 MATERIALI GRANULARI

Un particolare esempio di sostanza macroscopica sono i materiali granulari, nonostante questi appaiano come delle sostanze molto piccole.

Con materiali granulari si intende un sistema composto da un numero elevato di particelle macroscopiche; lo zucchero, la farina, i cereali, la ghiaia, la sabbia, le polveri, i detriti ne costituiscono un esempio. Essi, oltre l'acqua, rappresentano le sostanze più comuni sia in ambienti naturali che durante eventi di vita quotidiana, con le quali l'uomo viene a contatto. Anche i prodotti industriali vengono lavorati e trasportati in forma granulare come minerali, materiali da costruzione, rottami, detriti e via discorrendo.

Nonostante questi apparentemente possano sembrare dei sistemi semplici, in realtà sono ancora poco compresi dato che non sono assimilabili a nessuno dei tre stati di aggregazione della materia: gassoso, liquido e solido.

Come sottolinea A. Vulpiani, l'impatto economico dei mezzi granulari solo nell'industria chimica a metà degli anni Novanta era dell'ordine di cento miliardi di dollari annui, per

[63] Arcà M., Bassino L., Degiorgi E., *Dentro la materia. Una storia di atomi, molecole, particelle,* cit., p.82.

cui anche un risparmio percentuale modesto nel loro trattamento rappresenterebbe un grosso passo avanti[64].

Nel passato lo studio di tali materiali è stata una prerogativa quasi esclusiva di ingegneri e geologi, in quanto sistemi onnipresenti nelle loro ricerche scientifiche; basti pensare ai deserti, alle spiagge, alle distese nevose, ai fondali marini o a fenomeni quali le valanghe o frane.

Viceversa, tra i fisici prevaleva una logica di tipo riduzionista; dato che quei sistemi sono costituiti da particelle solide di grandezze varie (di diametro in genere tra il micrometro, come le polveri, e alcuni centimetri, come la ghiaia), il solo problema ritenuto importante sembrava quello di capirne gli aspetti microscopici, cioè quelli legati alle proprietà del singolo grano.

Le proprietà che hanno a che fare con la dimensione della materia hanno conseguenze molto importanti sul loro comportamento che, spesso non essendo intuitivo, diventano una delle cause principali della difficoltà che si riscontra nel costruirne una teoria sistematica e pienamente soddisfacente.

Di recente, si è invece capito che per comprendere una classe importante di fenomeni naturali che avvengono su scala macroscopica, non sono rilevanti i dettagli del comportamento dei singoli elementi, bensì le loro proprietà collettive[65].

Nei sistemi granulari, l'aspetto interessante, sono quei fenomeni che si manifestano qualitativamente in modi molto diversi rispetto ai costituenti elementari, sia nella fase solida che in quella fluida.

[64] Marini Bettolo U., Puglisi A., Vulpiani A., *La forza dei granelli,* in "Le Scienze 408", 2002, p.75.
[65] Marini Bettolo U., Puglisi A., Vulpiani A., *ibid.*

È quindi fuorviante cercare di stabilire strette analogie con la descrizione statistica di un sistema microscopico costituito da molecole.

Ad esempio, nei sistemi composti da molti elementi microscopici la temperatura ha un ruolo molto importante e regola gli scambi di energia tra le molecole. In un sistema granulare, per contro, la temperatura non sembra regolare gli scambi di energia. È ciò che avviene quando un granello di ghiaia messo in un bicchiere d'acqua sarà quasi completamente insensibile alle fluttuazioni termiche[66] a differenza di un microscopico pezzettino di frutta, il quale fluttuerà da una parte all'altra del bicchiere lentamente.

Anche nel mescolamento, i sistemi granulari hanno un comportamento differente da quello tipico dei fluidi; mentre mescolare due fluidi appare semplice, il mescolamento dei granulari richiede accorgimenti particolari.

Un esempio che illustra il fenomeno del mescolamento dei granulari è mostrato da un esperimento nel quale un cilindro disposto orizzontalmente, che può ruotare intorno al suo asse viene riempito parzialmente da materiale granulare. Ruotando il cilindro i grani si mescolano. Ciò che è sorprendente è che, variando la quantità di materiale all'interno del cilindro, si ottengono diversi gradi di mescolamento: in un cilindro molto pieno gran parte del materiale al centro del cilindro (ossia in prossimità dell'asse di rotazione) resta ben separata, mentre nelle regioni periferiche si ha un mescolamento, ma solo parziale. Riducendo il livello di riempimento, la regione non mescolata tende a ridursi e la miscela diviene più omogenea[67].

In campo didattico, l'utilizzo dei suddetti materiali sarà altamente utile per comprendere la differenza tra *discreto* e *continuo* e per comprendere, in particolar modo, come siano

[66] Consistono nell'agitazione delle molecole del liquido circostante.
[67] Marini Bettolo U., Puglisi A., Vulpiani A., *ivi*, p.78.

parti opposte della stessa medaglia. Prendendo un bicchiere di farina, che da una parte è apparentemente una sostanza continua e divisibile in infinitesime parti, e dall'altra discreta in quanto contenuta in un bicchiere, didatticamente, è possibile discretizzarla in parti più piccole grazie all'utilizzo di strumenti di misurazione convenzionali (becher graduato) e non convenzionali (bicchiere).

Infatti, altri materiali apparentemente discreti come il riso se presi nella loro "individualità" possono essere contati e non misurati, se invece presi in grandi quantità (2/3 kg) vengono "trattati" anche essi come materiali continui.

3.4. COME DEFINIAMO LO SPAZIO-TEMPO?

Se, fino a questo momento, si è delineato un percorso che ha evidenziato come nel corso del tempo si sono sviluppate un continuo di possibilità in riferimento ai due temi principali, ora si analizzerà una delle più grandi sfide della fisica.

Una domanda alla quale numerosi studiosi, nel corso degli anni, hanno cercato di trovare una risposta, è se lo spaziotempo costituisca un modello *continuo* ovvero *discreto*.

Negli studi di gravità quantistica, fisica classica e meccanica quantistica, non si sa ancora bene come conciliare la "granularità" quantistica dello spaziotempo alla Scala di Planck con la teoria della relatività ristretta.

Se la fisica classica descrive lo spaziotempo come un oggetto *continuo*, senza vuoti e discontinuità, per altri modelli, come quelli di gravità quantistica, la trama dello spaziotempo è invece "granulosa" (a piccolissime scale), come se si trattasse di un mutevole intreccio caratterizzato da pieni e vuoti.

Questo enigma, però, risale ad almeno 2500 anni fa, cioè all'epoca in cui vennero introdotti una serie di paradossi dal filosofo greco Zenone di Elea.

Il secondo paradosso dell'autore, il più famoso, è Achille e la Tartaruga, nel quale Zenone si immaginò che Achille, noto per essere il più veloce, venisse sfidato a raggiungere la lenta tartaruga, alla quale fu concesso un vantaggio iniziale.

Il paradosso era fondato su questo presupposto: nel tempo che Achille impiega per raggiungere il punto in cui inizialmente si trova la tartaruga, quest'ultima avrà percorso un piccolo tratto; dopo che Achille avrà percorso questo piccolo tratto, la tartaruga sarà ulteriormente avanzata e Achille non raggiungerà mai la tartaruga, perché dovrà percorrere gli infiniti spazi che colmano la distanza tra i concorrenti.

Nonostante ciò, con l'introduzione del calcolo infinitesimale si è trovata una risposta matematica ai paradossi, in quanto esso fu in grado di calcolare il momento esatto in cui Achille supera la tartaruga, provando che questo non avviene in un tempo infinito, nonostante lo spazio sia indefinitamente divisibile.

Ma la "questione" sollevata da Zenone sulla struttura di spazio e tempo, ovvero se il tempo e lo spazio sono continui come una linea ininterrotta oppure risultano dall'accostamento di un insieme di unità discrete come un filo di perle, è tutt'ora oggetto di riflessione.

Per cui, come detto precedentemente, ad oggi i ricercatori non trovano concordi per quanto riguarda la natura dello spaziotempo.

Tuttavia, ammettendo l'esistenza di una unità minima di lunghezza, la più piccola possibile, come del resto fece lo stesso Zenone, i teorici furono in grado di ridurre gli infiniti ad un insieme di numeri finiti.

Un modo per ottenere una lunghezza finita è quello di "ritagliare a pezzi" lo spazio e il tempo, rendendolo *discreto*. Per i teorici della gravità quantistica si riduce tutto, in qualche modo, ad una lunghezza minima, ma non tutti gli approcci seguono la stessa strada dei processi di "discretizzazione" dello spazio e del tempo.

Una prospettiva meno conosciuta è quella della teoria dialettica sviluppata nel primo Medioevo da religiosi islamici per la ricerca dei principi teologici, chiamata *Kalam*. Secondo il *Kalam*, tutte le cose del mondo sono assemblate da un numero finito di componenti fondamentali chiamati *Jawhar* (sostanza).

Questa struttura discreta si applica non solo ai corpi materiali, ma anche a spazio, tempo, movimento ed energia. Infatti, questo considera spazio e tempo intimamente legati e coesistenti, e ciò li riconduce alle proprietà del mondo fisico che non esisterebbe in assenza degli oggetti.

Dunque, la filosofia *Kalam* rifiuta il concetto di infinito e di infinitamente divisibile e cerca di dimostrare che il creato ha necessariamente avuto un inizio, anche se questo non è stato il big bang cosmologico, ma piuttosto la scintilla divina.

Tuttavia, a parte poche speculazioni religiose o filosofiche, il pensiero scientifico era sempre rimasto ancorato al concetto di continuità ed infinita divisibilità di spazio e tempo.

Nel tentativo di cercare una "soluzione" possibile, sono state sviluppate diverse teorie.

Con la nozione classica della fisica Newtoniana[68] lo spazio viene descritto come immenso, eternamente immobile a tre dimensioni, senza limiti in ogni direzione, dove tutto l'esistente si muove al fluire di un tempo universale che non ha inizio e che mai avrà fine. Spazio e tempo sono entità geometricamente e matematicamente perfette, continue ed infinitamente divisibili nella loro struttura.

---

[68] Come affermato da Newton I, in *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, nel 1686.

Nella “teoria delle stringhe” la risoluzione è limitata dall’estensione delle stringhe e non perché qualsiasi cosa sia discreta.

In un’altra dottrina concorrente, detta della “gravità quantistica”, lo spazio e il tempo sono ridotti in “blocchi discreti”, il che dà luogo ad una lunghezza, area e volume dello spaziotempo i cui valori, espressi in unità della lunghezza di Planck, sono i più piccoli possibili.

Un differente approccio alla gravità quantistica, detto “asymptotically safe gravity”, propone una risoluzione limite ma nessuna discretizzazione.

Ancora, un altro orientamento, detto degli “casual sets”, si basa esplicitamente sul concetto di discretizzazione.

In ogni caso, la maggior parte dei fisici onorano i concetti di Einstein[69], il quale ha indicato che lo spazio e il tempo sono interconnessi e formano una entità dinamica chiamata “spaziotempo”.

Per tale ragione, diversi metodi alla gravità quantistica considerano sia lo spazio che il tempo o entrambi continui o entrambi discreti. Tuttavia, alcuni teorici affermano che solo lo spazio o solo il tempo possono essere discreti.

Infine, ancora oggi la principale questione della fisica risulta conciliare le due teorie fisiche di maggior successo, “la relatività generale” di Einstein e “la meccanica quantistica”, che funzionano perfettamente, ma in ambiti completamente diversi.

“La relatività generale” spiega la gravitazione e l'universo a grande scala, astronomica e cosmologica. “La meccanica quantistica” spiega l'universo sulla scala microscopica, su distanze atomiche al di sotto di un miliardesimo di metro o ancora più piccole, e la sua comprensione è alla base di tutti i dispositivi elettronici che usiamo quotidianamente.

---

[69] Come riportato da Einstein A., in *Come io vedo il mondo. La teoria della relatività*, nel 1975.

Recentemente, nel 2015, HUMOR[70] (Heisenberg Uncertainty Measured with Opto-mechanical Resonators) ha ideato e realizzato un modo completamente nuovo di sondare lo spaziotempo a dimensioni estremamente piccole grazie all'utilizzo di "microspie" sensibilissime, in grado di ascoltare il flebile rumore delle fluttuazioni dello spaziotempo. Questi strumenti non hanno ancora osservato una granulosità dello spaziotempo, ma sono riusciti a porre nuovi limiti tali per cui molti scienziati sono al lavoro per migliorare la strumentazione e spingersi a scale sempre più piccole.

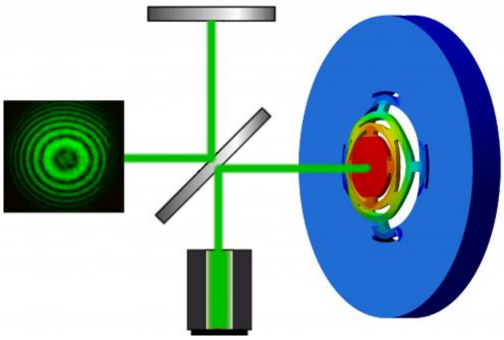

Figura 1: *Il rumore dello spaziotempo*.
Fonte: www.cnr.it/it/news/6111/continuo-o-discreto-microscopie-in-ascolto-dello-spaziotempo

Francesco Marin, ricercatore di HUMOR, dichiara che:

«La strada per una chiara comprensione del tessuto spaziotemporale che ci circonda è ancora lunga, ma i risultati attuali possono già essere utilizzati per verificare le previsioni delle teorie che mirano a unificare gravità e fisica quantistica, costituendo un importante punto di riferimento e di partenza per l'analisi sperimentale di queste problematiche[71].»

---

[70] HUMOR è frutto di una collaborazione tra INFN, Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR), LENS, Università di Firenze, Trento e Camerino e Fondazione Bruno Kessler.
[71] Varaschin A., *Continuo o discreto: microspie in ascolto dallo spaziotempo*, in www.cnr.it/it/news/6111/continuo-o-discreto-microscopie-in-ascolto-dello-spaziotempo, 7 febbraio 2021.

In conclusione, si può affermare che ricercare delle evidenze riconducibili alla natura discreta dello spaziotempo costituirebbe un passo in avanti verso la risoluzione di un paradosso dell'epoca moderna, ossia il paradosso dell'informazione dei buchi neri introdotto nel 1974 da Stephen Hawking.

CAPITOLO IV: IPOTESI PROGETTUALI DI ATTIVITÁ DIDATTICHE

A causa dell'emergenza sanitaria che ha colpito il mondo intero, in questa sede presenterò delle attività didattiche che purtroppo non potrò realizzare con i bambini.

In compenso, cercherò di mettere io stessa in pratica, a casa, le attività proposte, documentandole attraverso delle foto e dei video.

Il materiale di ogni proposta didattica è stato condiviso nel gruppo di lavoro tesi creato su "classroom". La condivisione delle nostre esperienze didattiche ha permesso un confronto tra tutte noi, che osservando ed esaminando i lavori di ciascuna ha permesso di migliorarci e di arricchirci di nuove conoscenze. Inoltre, grazie all'ausilio dei video sono riuscita non solo a limare tutte quelle piccole imperfezioni che potevo riscontrare in ciascuna attività, ma anche a comunicare ai bambini, nelle attività presentate nel quinto capitolo, le indicazioni per stimolarli nella realizzazione delle sperimentazioni in classe e a casa.

Nel corso delle spiegazioni di ogni singola attività verrà presentata sia la messa in pratica, che gli obiettivi che si vogliono raggiungere per ogni singola sperimentazione.

Infine, durante degli incontri di formazione docenti, avvenuti a partire da settembre 2020 fino ad aprile/maggio 2021, tenuti dal mio relatore E. Balzano insieme al suo gruppo di ricerca, ho avuto l'opportunità di arricchire le mie ipotesi progettuali grazie al confronto e alle esperienze degli insegnanti che hanno partecipato al corso. Quest'ultimi, inoltre, sono dei docenti inseriti nel mondo della scuola, non solo primaria ma anche delle scuole secondarie di primo e secondo grado.

4.1 ATTIVITÀ 1: DRAGO DINO E LE LENTICCHIE

In classe si predisporrà un gioco che immergerà i bambini in una realtà differente.

La storia ha come protagonista Drago Dino, il padrone del bosco, che mangia esclusivamente le lenticchie raccolte dai suoi sudditi. Ogni giorno Dino raccoglie mezzo bicchiere di lenticchie da ognuno di loro.

- Un bambino avrà il ruolo del Drago Dino e dovrà raccogliere in un sacco le lenticchie a lui donate;
- cinque bambini rappresenteranno la giuria che conterà i giorni e quanti mezzi bicchieri ha raccolto Dino;
- coloro che restano saranno i sudditi del bosco che dovranno versare mezzo bicchiere al proprio padrone ogni giorno, quest'ultimi avranno a propria disposizione un bicchiere di plastica e una brocca di lenticchie.

All'improvviso, dopo alcuni giorni, Drago Dino fa cadere il suo sacco di lenticchie per terra, a questo punto il sovrano chiederà ad ogni suddito di recuperare la quantità di lenticchie versate fino a quel momento.

Con l'aiuto della commissione, che avrà contato i giorni e i mezzi bicchieri versati da ogni suddito, ogni giocatore dovrà recuperare le proprie lenticchie.

A supporto dell'attività, alla fine del gioco, verranno messi a disposizione diversi oggetti di misura: una bilancia, dei misurini, dei cucchiaini.

4.1.1 PRATICA

Inizio il gioco con due becher pieni di lenticchie e un bicchiere trasparente che utilizzerò per versare le lenticchie nel sacco di Drago Dino.

Figura 2:Becher con le lenticchie e bicchiere trasparente.

Dopo aver effettuato questa operazione per tre volte, dai due contenitori, Drago Dino fa cadere il sacco pieno di lenticchie, a questo punto ho dovuto riprendermi le stesse quantità versate. Alla fine, ho potuto verificare che non sono riuscita a riprendermi la stessa dose di lenticchie che avevo prima (in un contenitore avevo più lenticchie e nell’altro ne avevo di meno, rispetto all’inizio del gioco), questo perché non ho realmente quantificato quante ne avevo versate di volta in volta; poteva capitare che versassi più o meno di mezzo bicchiere e, allo stesso modo, quando recuperavo le mie quantità, non sapevo quante realmente ne stavo riprendendo.

Così mi sono domandata: “come posso essere certa di riuscire a prendere mezzo bicchiere?”.

Ho pensato di poter contare le lenticchie una ad una, ma avrei perso troppo tempo nel portare a termine il conteggio; così ho deciso di utilizzare un misurino per poter quantificare le lenticchie che raccoglievo, tenendo così sotto controllo le reali misure.

Figura 3:strumenti di misurazione

In questo caso ho utilizzato il misurino, ma potevo utilizzare altre strategie per regolare le quantità del mezzo bicchiere, ad esempio un cucchiaino, una bilancia o avrei potuto incidere sul bicchiere un segno con il pennarello, che mi avrebbe indicato la misura corretta.

I materiali utilizzati in questa attività sono: i becher trasparenti, le lenticchie, un sacco per Drago Dino, dei misurini di diverse dimensioni, la bilancia, il bicchiere e il cucchiaio/cucchiaino.

4.1.2 OBIETTIVO

Attraverso la metodologia della Playfull Learning il bambino, in quanto autore del progetto, è spinto da una motivazione interna e si focalizza sull'apprendimento. Grazie a questa attività introduciamo i concetti di *discreto* e *continuo,* infatti le lenticchie, nonostante siano un materiale *discreto* e per questo possono essere contate, nelle quantità utilizzate non permetteva la sua discretizzazione e per tale motivo si comporta come se fosse un materiale *continuo*. Per arrivare a contare le quantità messe in gioco, sarà necessario introdurre delle unità di misura che possono essere sia convenzionali che non convenzionali.

4.2 ATTIVITÀ 2: CONTIAMO I GIORNI

In questa attività suddividerò la classe in sei piccoli gruppi. Presenterò diversi materiali: un sacco di caffè, uno di farina, uno di zucchero, uno di conchiglie, un sacco di mollette, e uno di bottoni.

Racconterò ai bambini che ogni giorno per un periodo di tempo inserivo in ogni contenitore un bottone, una molletta, una conchiglia e un po' di caffè, di farina e di zucchero.

Il loro compito sarà quello di individuare per quanti giorni ho effettuato quelle operazioni.

Figura 4:sacchi contenenti i materiali discreti e continui.

4.2.1 PRATICA

Nel momento in cui inizio a contare è subito evidente che per i sacchi contenenti i bottoni, le conchiglie e le mollette è facile individuare per quanti giorni ho effettuato quell'operazione (per sei giorni), per il caffè, la farina e lo zucchero è più complicato.
Così come nella prima attività, saranno messi a disposizione diversi oggetti di misurazione: la bilancia, il cucchiaino, il cucchiaio e i misurini di diversa grandezza.
A seconda dell'unità di misura che decidevo di utilizzare contavo un totale di giorni differenti, con il misurino più piccolo o con il cucchiaino arrivavo a contare più giorni, con il misurino medio e il cucchiaio sono riuscita a contare più o meno gli stessi giorni del materiale discreto, ancora con il misurino più grande contavo un totale minore.

Figura 5:verso la farina con il cucchiaio.

Figura 6:verso la farina con il misurino grande.

Inoltre, per provocare i bambini è possibile introdurre anche un altro "elemento"; se si osserva bene tutte le mollette sono perfettamente uguali, mentre tra i bottoni e le conchiglie ci sono elementi più piccoli e più grandi. Potremmo prendere la molletta e spezzarla in due, così da avere una mezza molletta e poter affermare di avere ad esempio due mollette e mezzo (come nel caso delle sostanze continue, che contate con i diversi strumenti possono essere contate come unità e mezza). Quando parliamo dei bottoni o delle conchiglie, non potremmo mai indicare quello più piccolo come una mezza unità, in quanto preso da solo rappresenta comunque un unico elemento.

I materiali utilizzati per realizzare questa sperimentazione sono: il caffè, la farina, lo zucchero, le mollette, i bottoni, le conchiglie, le bustine e gli oggetti di misurazione.

4.2.2 OBIETTIVI

In linea con l'attività precedente, i bambini entrano sempre più nel vivo dell'utilizzo dei materiali e nell'identificare le loro differenze come materiali *continui* e *discontinui*. In questo caso si sottolinea l'importanza delle unità di misura utilizzate, in quanto utilizzando degli oggetti più piccoli per contare arrivavo a un conteggio maggiore, invece, utilizzandone uno più grande ottenevo o un numero medio o più grande. Inoltre, tutte le volte in cui versiamo il contenuto per contarlo si osserva come il numero, in questo caso, sia legato al rapporto tra quantità.

4.3 ATTIVITÀ 3: DAL *CONTINUO* AL *DISCRETO*

Presenterò ai bambini diversi materiali che possono essere contati come delle singole unità, come una barretta di cioccolato, il gessetto, una pennetta di pasta. Chiederò ai bambini quante quantità contano dei materiali presenti sulla cattedra.

Successivamente, taglierò il cioccolato finemente, gratterò il gessetto su una grattugia e con un martello schiaccerò la pennetta di pasta.

Dopo aver effettuato queste azioni, domanderò ai bambini: “quante quantità sono presenti ora? È possibile rimettere insieme i materiali?”.

Suddividerò la classe in tre gruppi, ad ognuno verrà dato un materiale, la pasta, il cioccolato e il gessetto. Ognuno di loro dovrà “rompere” il proprio materiale e con quello che otterranno dovranno cercare di trovare delle strategie nel ricreare la forma precedente.

4.3.1 PRATICA

Procederò con un materiale alla volta. Ho preso sette pennette di pasta e le ho frantumate con un martello e ho subito notato che la pasta si è scomposta in maniera differente, avevo dei pezzetti più grandi altri più piccoli e si è creata una polverina. A quel punto mi sono posta una domanda: “come posso ricreare la forma che avevano precedentemente?”.

Ho deciso di dividere il materiale che mi ritrovavo in sette mucchietti e ho cercato di formare le pennette visivamente, anche se è impossibile ricreare lo spazio vuoto tra un’estremità e l’altra. Nell’andare avanti nell’operazione ho cercato di livellare di volta in volta le quantità nei diversi mucchietti.

Alla fine, ho pensato che avrei potuto utilizzare la bilancia per accertarmi che le quantità che avevo ricreato fossero le stesse della pasta; così ho preso una pennetta non frantumata e l’ho pesata, poi ho preso un mucchietto, l’ho messo sulla bilancia e mi sono resa conto che la quantità era più o meno la stessa anche se variava di qualche grammo.


Figura 7:mucchietto di pasta frantumata.


Figura 8:pennetta "ricomposta".

Ho cercato di procedere allo stesso modo anche con gli altri due materiali.


Figura 9:barretta di cioccolato frantumata.


Figura 10:barretta di cioccolato "ricompattata".

I materiali per realizzare quest'attività, anche se è possibile utilizzarne altri, sono: la pasta, i gessetti, il cioccolato, il martello, la grattugia, un coltello e la bilancia.

4.3.2 OBIETTIVO

Si pone l'attenzione sui materiali che nonostante siano "continui" possono essere discretizzati in tante piccole parti, ma a loro volta quelle piccole parti non possono essere contate perché si presentano o come delle polverine, nel caso del gessetto, o come dei granuli disomogenei, nel caso del cioccolato e della pennetta di pasta.

4.4 ATTIVITÀ 4: IL GIARDINO DI PASTA

Si propone ai bambini di realizzare dei giardini a casa con la pasta utilizzando un foglio bianco o di un altro colore A4; quest'ultimo dovrà essere suddiviso in 4 parti uguali ed ogni spazio dovrà essere ricoperto da un formato di pasta diversa ma nella stessa quantità. Ogni bambino dovrà portare il proprio risultato finale in classe e condividere con i suoi compagni le proprie osservazioni.

4.4.1 PRATICA

Ho suddiviso il foglio in 4 parti uguali; ho applicato 10 pennette, 10 farfalle, 10 ditalini e 10 fusilli, nel proprio spazio.

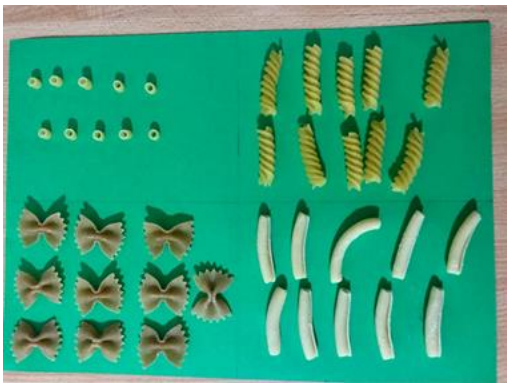
Figura 11:il giardino di pasta.

Lo spazio occupato da ogni formato di pasta è diverso in quanto ogni unità ha il proprio volume.

4.4.2 OBIETTIVO

Come si osserva dall'immagine superiore, ogni formato di pasta occupa uno spazio totalmente differente anche se inserite in uno stesso spazio. L'esperienza di mettere a confronto numerosità uguali, attivando una corrispondenza biunivoca, che se vogliamo, può risultare in analogia e in contrasto con l'esperienza di confrontare estensioni continue, appare cruciale per tutto lo sviluppo cognitivo ed in particolare per tutto il percorso di comprensione del numero. Per i bambini, quindi, può essere di grande aiuto confrontarsi con esperienze che mettono in gioco un confronto qualitativo di rapporti, che attiva una gestione intrecciata del numero e dello spazio. In questo caso il rapporto tra *discreto-continuo* correla fortemente numerosità ed estensioni spaziali, questa correlazione si evidenzia dall'uguale numerosità dei diversi tipi di pasta e dallo spazio da loro occupato.

4.5 ATTIVITÀ 5: LA MISURA DEI BASTONCINI

Per iniziare il lavoro di misurazione è necessario individuare le conoscenze dei bambini, attraverso il brainstorming, proponendo domande come: “Che vuol dire misurare?”; “Come o che cosa si misura?”.

Prenderò dei bastoncini di diverse misure, li mostrerò ai bambini e domanderò loro: come posso misurare questo oggetto?

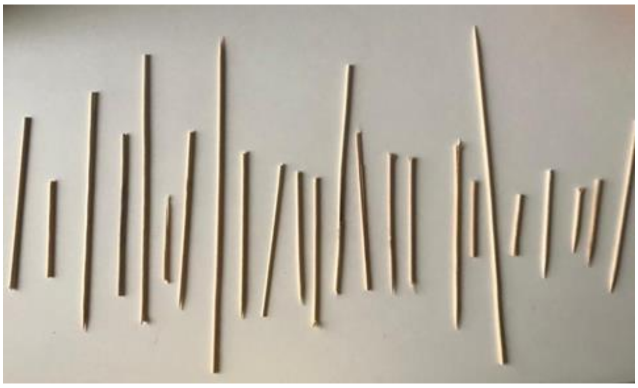

Figura 12:bastoncini di legno.

Sappiamo che non è possibile misurare un oggetto in sé, ma le proprietà dell’oggetto stesso. Quindi, possiamo misurare un oggetto facendo riferimento al suo peso, al suo volume o alla sua lunghezza.

Il primo passo che si effettuerà con i bambini sarà quello di individuare la proprietà che si vorrà prendere in esame per classificare oggetti “uguali”, che, però, differiscano in quella determinata proprietà, come nel caso dei bastoncini nella lunghezza.

4.5.1 IPOTESI 1 e 2

Si dispongono in classe diversi contenitori che possono contenere una certa lunghezza. Se si scegliesse di prendere come unità di misura un righello si potrebbero organizzare 3 contenitori, il primo può contenere una lunghezza che va da 0cm fino a 5cm, il secondo da 5,01cm fino a 10cm e il terzo da 10,01cm e oltre.

Figura 13:bastoncini in un contenitore che può contenere una lunghezza da 0cm a 5cm.

Figura 14:bastoncini in un contenitore che può contenere una lunghezza da 5,01cm a 10cm.

Figura 15:bastoncini in un contenitore che può contenere una lunghezza da 10,01cm a oltre.

Oltre al righello, come unità di misura è possibile utilizzare anche una penna o una gomma da cancellare. Grazie all'ausilio di questi due oggetti classifichiamo i bastoncini in due gruppi, in uno andrebbero i bastoncini più piccoli della penna e nell'altro quelli più grandi; lo stesso vale per la gomma.

Figura 16:unità di misura la penna.

Figura 17:unità di misura la gomma.

4.5.3 OBIETTIVI

In questa attività di misurazione si richiede la visualizzazione dell'attributo da misurare come composto da unità. Lo sviluppo delle capacità di misurazione, di solito, inizia con il confronto diretto degli oggetti lungo una dimensione. I bambini vedono questa relazione inversa tra la dimensione di un'unità di misura e il numero di unità necessarie per fare una data quantità, riflessa nella relazione inversa tra l'ordine dei numeri di conteggio e l'ordinamento delle frazioni unitarie.

Connesso al numero e alla misurazione, vi è l'analisi dei dati, che ci porta alla classificazione di diverse categorie, come nel caso dei contenitori di diverse dimensioni. La descrizione o confronto delle categorie di solito ci forniscono un contesto a cui è possibile applicare il numero e la misurazione.

Dal confronto alla misurazione, l'attività di misurazione si svolge con unità di misura arbitrarie e convenzionali.

CAPITOLO V: SPERIMENTAZIONE

5.1. LA CLASSE INTERESSATA

La sperimentazione si è svolta nel corso dell'anno accademico 2020/21 nel 1° C.D. Marconi di Afragola.

A causa dell'emergenza da COVID-19 l'intero percorso didattico si è svolto in modalità a distanza.

Le attività hanno coinvolto una singola classe, la 2°G, per un totale di 8 ore.

Nel corso della sperimentazione ho registrato le conversazioni con i bambini, non solo per poter riportare fedelmente le discussioni avvenute, ma anche per poter effettuare delle osservazioni e monitorare le risposte ed i comportamenti dei bambini durante ogni intervento.

Gli elaborati dei bambini, le foto, i video e le registrazioni hanno consentito di tener traccia di tutte le attività svolte.

5.1.1 I TRAGUARDI PER LO SVILUPPO DELLE COMPETENZE E GLI OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

I traguardi per lo sviluppo delle competenze sono volti, all'interno di tale progettazione, a far sì che l'alunno (in riferimento alle Indicazioni Nazionali[72] per il curricolo):

[72] Ministero dell'istruzione e dell'università di ricerca, *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione,* settembre 2012.

- sviluppi atteggiamenti di curiosità e modi di guardare il mondo che lo stimoli a cercare spiegazioni di ciò che vede;
- esplori fenomeni; con l'aiuto dell'insegnante, dei compagni o in modo autonomo, osserva e descrive lo svolgersi dei fatti, formula domande, anche sulla base di ipotesi personali, realizza semplici esperimenti;
- individui aspetti quantitativi e qualitativi nei fenomeni, producendo rappresentazioni grafiche, elaborando semplici modelli;
- faccia misurazioni, registri dati significativi;
- legga e comprenda testi che coinvolgono aspetti logici e matematici;
- costruisca ragionamenti formulando delle ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri.

Sempre in riferimento alle Indicazioni Nazionali per il curricolo, gli obiettivi di tale progettazione sono:

- individuare strumenti e unità di misura appropriati alle situazioni problematiche in esame;
- fare misure e usare la matematica conosciuta per trattare dati;
- descrivere semplici fenomeni della vita quotidiana legati ai liquidi e al cibo;
- contare oggetti o eventi, a voce, mentalmente e segnando, in senso progressivo;
- misurare grandezze utilizzando sia unità arbitrarie sia unità e strumenti convenzionali;
- elaborare creativamente produzioni personali;
- guardare e osservare con consapevolezza un'immagine o un fenomeno.

5.1.2 METODOLOGIE

Tale percorso didattico segue un approccio tipico della ricerca-azione, coinvolgendo tutti i partecipanti in un percorso formativo che prevede l'alternarsi di incontri dedicati alla didattica della fisica.

In didattica della fisica, il laboratorio è uno strumento fondamentale, in quanto il bambino è coinvolto attivamente nel processo conoscitivo, nel formulare delle ipotesi, nella sperimentazione, nel raccogliere dati, nel discutere e argomentare le proprie scelte, confrontandosi con i pari e con l'insegnante.

Gradualmente imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi e conducendo delle esplorazioni opportune.

Inoltre, tale disciplina può contribuire nello sviluppare le capacità di mettere in relazione il pensare e il fare, ed offre strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare fenomeni.

Tutti gli argomenti sono stati affrontati attraverso la metodologia del *Learning by Doing*, tale termine sostanzialmente significa imparare facendo, imparare attraverso il fare ove l'imparare non sia solo il memorizzare, ma anche e soprattutto il comprendere. Per comprendere e memorizzare, sembra che la strategia migliore sia l'apprendere attraverso il fare, l'operare e le azioni.

Per comprendere, nella mente del soggetto, deve intervenire la riflessione e il pensiero. Le azioni devono essere interiorizzate, eseguite mentalmente. Occorre riflettere, pensare, acquisire consapevolezza delle azioni.

All'azione si deve accompagnare il pensiero: quindi *Learning by Doing*, ma anche *Learning by Thinking*. Operare pensando, riflettendo, discutendo con sé stessi e con gli altri (*Cooperative Learning*)[73].

Infatti, attraverso la discussione partecipata, i bambini hanno portato un contributo diretto alla lezione problematizzando, cercando una soluzione, confrontandosi e discutendo con i propri compagni e con gli insegnanti.

Inoltre, è stato favorito il *Flipped Classroom* una metodologia attraverso la quale i bambini hanno portato il proprio contributo in classe, dopo aver effettuato delle sperimentazioni a casa.

Pertanto, le attività svolte sono state ispirate al Progetto Les[74] e ai lavori di sperimentazione presenti in due documenti intitolati "Travasi. Misura, numeri, geometria, e relazioni tra grandezze" e "La cucina è un laboratorio", con lo scopo di riuscire a riportare esperienze già svolte in altri istituti e sperimentarne la loro validità anche in contesti diversi.

5.2 ATTUAZIONE

5.2.1 ATTIVITÀ 1: *I BICCHIERI D'ACQUA*

Nella parte introduttiva ho mostrato un'immagine ai bambini grazie alla funzione "presentazione" di meet; quest'ultima mostrava tre bicchieri denominati A, B e C ed ognuno possedeva delle quantità d'acqua differenti.

---

[73] Marcone V.M., *"Learning by doing": towards new paradigms of Work–related learning*, in "Formazione & Insegnamento", 2017, p.167.

[74] www.les.unina.it/, in "Risorse Didattiche".

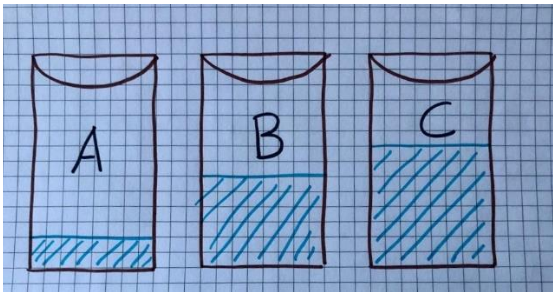

Figura 18:immagine presentata ai bambini, che raffigura i tre bicchieri con quantità d'acqua differenti.

Ho spiegato ai bambini che l'obiettivo doveva essere quello di osservare e di individuare nelle tre quantità d'acqua le possibili uguaglianze e disuguaglianze; a supporto dell'attività ho disposto dinanzi la telecamera i tre bicchieri "reali" così che io potessi maneggiarli per procedere con le sperimentazioni.

Come si può osservare nei bicchieri ci sono tre quantità differenti di acqua, e si presentano in questo modo: A≠B; B≠C; A≠C. Ci sono tre dosi diverse, ma è possibile osservare che: A+B=C, B+A=C, C-A=B, C-A=B.


Figura 19:io che mostro i tre bicchieri d'acqua.

Inizia una discussione guidate con i discenti, ognuno ha cercato di trovare una soluzione al problema.

Vincenzo: "la A è il bicchiere più piccolo di tutti e tre, la B è metà e la C è la più grande".
Sabrina: "la A è la più piccola di tutte, la B la media di tutte e tre e la C la più grande di tutte, sarebbero tutte diverse però se si toglierebbe un po' di acqua alla C e alla B sarebbero tutti uguali. Alla C togliamo un sacco di acqua e alla B un pochino di meno per avere tutte A".

Oscar: "sono come una scaletta! Togliamo alla C, aggiungiamo un po' alla A e diventano tutte come la B, oppure togliamo l'acqua alla C e alla B e poi sono come la A. Ho un'altra idea aggiungiamo un po' di acqua alla B e un pochino di più alla A così sono tutti uguali alla C".

Vincenzo: "secondo me si deve togliere l'acqua dalla B e dalla C per avere la A. Secondo me è questo il metodo".

Dopo che gli alunni hanno iniziato ad esprimere le proprie idee ho cercato di indirizzarli verso una soluzione domandandogli: *"per arrivare alla C quanta acqua devo aggiungere alla B?".*

Miriam: "2 litri! Perché se metti il dito e vai a vedere l'acqua della C ci vogliono due quadratini nella B per arrivare alla C. visto così ci vogliono 4 litri per la A ed arrivare alla B".

Giorgia: "la A per arrivare alla B ci vogliono 4 litri e per la C ci vogliono 6 litri".

Giuseppe: “se togliamo 3 litri alla C e 1 alla B e li mettiamo nella A abbiamo tutti i bicchieri uguali”.

A questo punto, prendo i bicchieri d’acqua che ho davanti a me e dico: *“se volessi spostare l’acqua che ho a disposizione nei bicchieri che cosa succederebbe?”.*

Dopo un serie di sollecitazioni i bambini mi chiedono di versare l’acqua da un bicchiere all’altro, così spostando l’acqua dalla B alla A il risultato sarà sorprendente!

Figura 20:io che verso l'acqua dalla B alla A.

Bambini: “ho capito maestra! Sono uguali alla C”.

Miriam: “dobbiamo togliere l’acqua nella A e versarla nella B, così la B e la C hanno la stessa quantità d’acqua. Mettiamo 2 litri nella B”.

Figura 21:i bicchieri a confronto A=B.

Anche se l’obiettivo non era quello di ragionare per litri i bambini avevano ben chiaro ciò che accadeva nel momento in cui l’acqua veniva travasata da una parte all’altra. A questo punto si cercano altre soluzioni al problema; in quanto, spostando l’acqua dalla B alla A si otteneva comunque la C, oppure togliendo delle quantità dalla C si potevano ottenere o la A se si toglieva dalla C la B, o la B se si toglieva dalla C la A.

Lucia: “abbiamo fatto un’addizione, A più B ci dà la C”.

Alla fine, ho chiesto ai bambini di rappresentare sul quaderno ciò che si era svolto durante quell’attività, nel frattempo una bambina era andata a prendere tre bicchieri e ha rappresentato con un pennarello le quantità d’acqua, simulando il gesto del versare da un bicchiere all’altro, al fine di ricapitolare ciò che si era detto (fig.22).

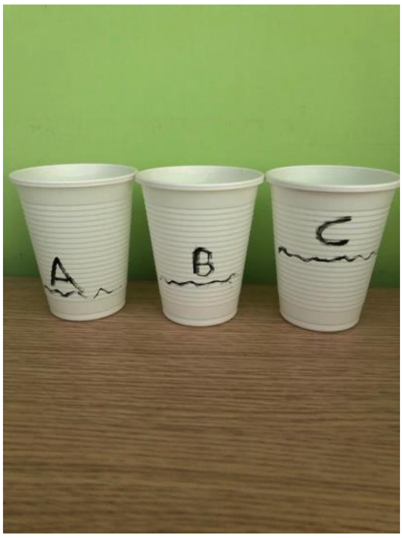

Figura 22:bicchieri realizzati da Sabrina per rappresentare le quantità d'acqua.

Sabrina: “maestra guarda, se togliamo la B alla C io faccio diventare la C come la A. Altrimenti mettiamo la B *nella A e abbiamo la C”.*

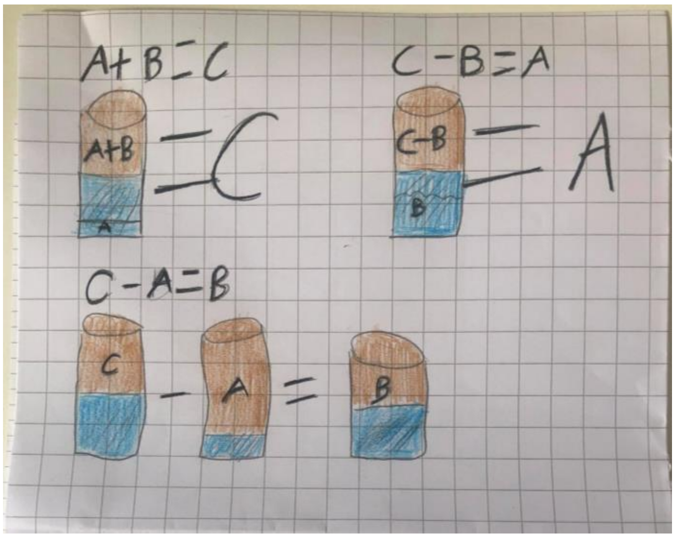

Figura 23:quaderno di Giuseppe.

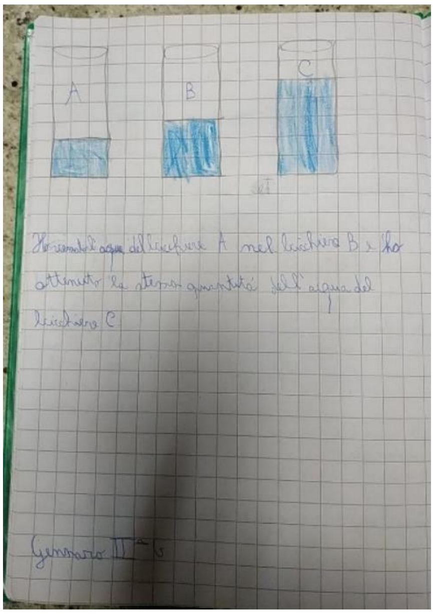

Figura 24:quaderno di Gennaro.

Ho versato l’acqua del bicchiere A nel bicchiere B e ho ottenuto la stessa quantità dell’acqua del bicchiere C.

L'addizione e la sottrazione vengono utilizzate per mettere in relazione gli importi prima e dopo l’aggiunta o la rimozione di quantità d’acqua, per mettere in relazione gli importi in parti e totali o per dire esattamente come si confrontano due importi.

I problemi e le situazioni che possono essere formulati con addizioni o sottrazioni si verificano in una varietà più ampia rispetto ai più semplici e comuni problemi di "aggiungere a" e "portare via". Questo metodo viene utilizzato dai bambini per risolvere i problemi di addizione e sottrazione, e, ancora una volta, si basano su un collegamento fluente tra l'elenco dei numeri e la cardinalità.

Viste da una prospettiva più avanzata, la maggior parte di queste situazioni possono essere formulate in modo naturale con un'equazione della forma A + B = C o C - B = A.

I tipi di situazioni che sono naturalmente formulati con queste equazioni sono il cambiamento più e il cambiamento meno, le situazioni messe insieme e le situazioni di confronto. Nelle situazioni di variazione più e variazione meno, c'è una quantità iniziale (A), un importo di cui questa quantità cambia (B) e la quantità risultante (C). I problemi in queste attività, in cui non sono noti numeri ma quantità, i bambini dovranno sforzarsi nel cercare di individuare in che modo è possibile risolvere il problema aggiungendo o togliendo delle quantità presenti.

5.2.2 ATTIVITÀ 2: *L'ACQUA E LE UNITÀ DI MISURA*

Per continuare le sperimentazioni con l'acqua, ho proposto a tutti gli alunni di prendere un foglio e segnare quante volte versavo con un bicchiere l'acqua in un becher graduato. Tutti alla fine hanno contato due bicchieri e mezzo; ho svuotato lo stesso becher e abbiamo ricontato quante volte ho versato l'acqua con un misurino. Con il misurino ho effettuato il "movimento" del versare dodici volte.

Figura 25:acqua versata nel becher con un bicchiere.

Figura 26:acqua versata nel becher graduato graduato con un misurino.

L'intero gruppo classe ha subito intuito che utilizzando oggetti più piccoli per versare l'acqua "le volte" sono di più rispetto ad un oggetto più grande. A questo punto per verificare se le quantità versate erano le stesse abbiamo utilizzato la bilancia.

Si è notato che 200ml di acqua corrispondevano a 200g sulla bilancia.

Anche in questo caso abbiamo una familiarizzazione con l'addizione e la sottrazione, in particolar modo con tutte e quattro le operazioni. Infatti, il lavoro con i volumi d'acqua e i travasi ha permesso agli alunni di lavorare con somme ripetute della stessa quantità e con la sottrazione.

Precedentemente con l'attività *"i bicchieri d'acqua"* si è lavorato con le uguaglianze e le disuguaglianze presenti nei tre bicchieri, ma anche in questo caso con l'utilizzo di diverse "unità di misura" si è effettuato un'attività analoga; le quantità d'acqua erano le stesse (uguaglianza), ma sono state versate con strumenti differenti (disuguaglianza).

Inoltre, l'uso dei becher graduati ha permesso ai bambini di lavorare con il concetto di numero, legato al rapporto tra quantità ed espressione del numero di volte in cui abbiamo versato il contenuto per il riempimento (ad esempio i 200ml di acqua).

I numeri hanno permesso il confronto tra i diversi volumi e, nel versare l'acqua nel contenitore graduato, si è osservato che il livello delle tacche che sale con continuità ci permetto ci discretizzare i valori. Tale *discretizzazione* ci aiuta a contare ed è più naturale per noi che siamo abituati a utilizzare l'insieme dei numeri naturali.

5.2.3 ATTIVITÀ 3: *QUANTO PESANO I MATERIALI?*

Dopo una serie di misurazioni del peso dell'acqua ho proposto ai bambini di pesare a casa altri materiali a loro scelta come la farina, lo zucchero, il caffè, il sale, le lenticchie, il riso, la pasta.

Come con l'acqua, i bambini hanno versato in un becher graduato 300ml di un materiale e lo hanno pesato sulla bilancia. Questa sperimentazione è stata realizzata con tre materiali a scelta degli alunni, i quali hanno dovuto non solo annotare sul quaderno i risultati ottenuti, ma hanno dovuto rispondere ad alcune domande.

Le domande alle quali hanno risposto erano: le quantità di acqua e degli altri materiali utilizzati, presenti nel becher graduato, sono le stesse? Che cosa osservo quando li peso sulla bilancia? Prova a spiegare il fenomeno.

Figura 27:becher graduato con 500ml di acqua sulla bilancia pesa 500g.

Figura 28:becher graduato con 500g farina sulla bilancia pesa 475g.

Figura 29:becher graduato con 500g di pasta sulla bilancia 169g.

Durante la lezione successiva si confrontano i risultati ottenuti dai discenti con i diversi materiali. Per nessuno dei materiali che hanno utilizzato, nei limiti della precisione con cui sono state effettuate le misure, la relazione tra peso e volume è la stessa che avevamo trovato per l'acqua nella lezione precedente.

Per quanto riguarda la precisione delle misurazioni, una bambina ha fatto presente che la sua acqua pesava sulla bilancia 380g; alla fine, grazie all'intervento di altri compagni, è riuscita a comprendere che in realtà non aveva tenuto in considerazione il peso del suo becher, che appunto pesava 80g. Così come per l'acqua, anche gli altri materiali pesati presentavano un peso maggiorato di 80g.

Lucia: la mia acqua pesa di più di 300, 380ml.

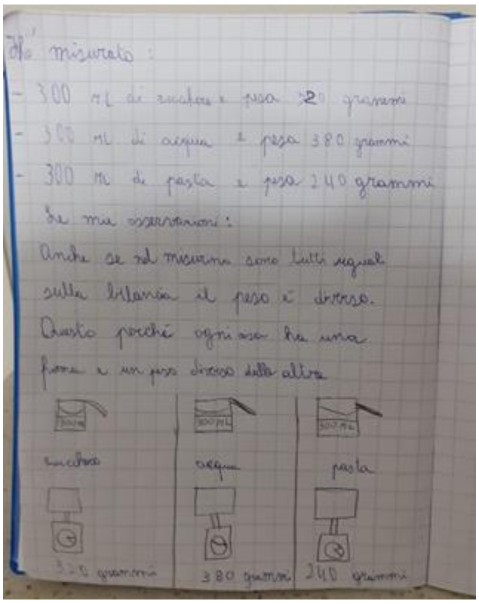

Figura 30:quaderno di Lucia.

Ho misurato:

- 300 ML di zucchero e pesa 320 grammi
- 300 ML di acqua e pesa 380 grammi
- 300 ML di pasta e pesa 240 grammi

Le mie osservazioni:

Anche se nel misurino sono tutti uguali sulla bilancia il peso è diverso.

Questo perché ogni cosa ha una sua

Successivamente, abbiamo visionato un video di un bambino che ha pesato l'acqua, lo zucchero e la pasta. Ed ha osservato che la pasta, occupando lo stesso spazio dello zucchero e dell'acqua, "*pesa di meno degli altri due*".

Figure 31,32,33:immagini estrapolate dal video, che mostrano come Domenico realizza l'attività.

In un secondo momento, i bambini hanno iniziato a proporre delle argomentazioni sul diverso peso dei materiali.

Oscar: "io ho pesato i piselli surgelati e pesavano di meno dell'acqua perché dentro i piselli sono delle palline vuote che non hanno niente e l'acqua ha un peso diverso perché dentro ha come dei pesi".

Lorenzo: "la pasta pesa di più dello zucchero perché *e più grande e dura mentre lo zucchero è più piccolo e morbido, mentre l'acqua è un liquido".*

Gennaro: "la pasta non occupa tutto lo spazio perché è bucherellata, mentre l'acqua prende tutto il bicchiere".

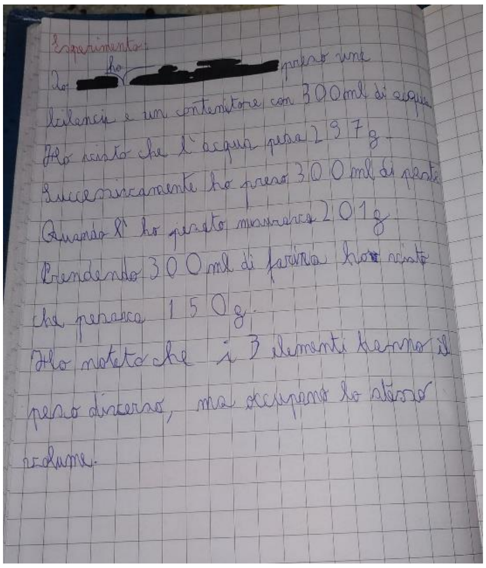

Figura 34:quaderno di Gennaro.

Io ho preso una bilancia e un contenitore con 300ml di acqua. Ho visto che l’acqua pesa 297g. Successivamente ho preso 300ml di pasta. Quando l’ho pesata misurava 201g. prendendo 300ml di farina ho visto che pesava 150g.

Ho notato che i 3 elementi hanno il peso diverso, ma occupano lo stesso volume.

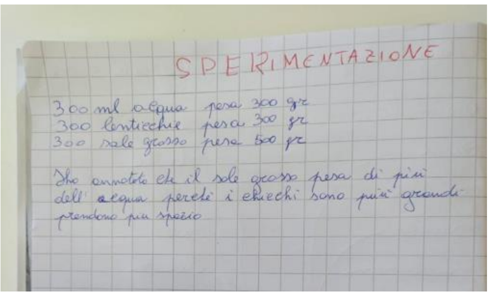

Figura 35:quaderno di Oscar.

300 ml acqua pesa 300 gr

300 lenticchie pesa 360 gr

300 sale grosso pesa 500

Ho annotato che il sale grosso pesa di più dell’acqua perché i chicchi sono più grandi prendono più spazio.

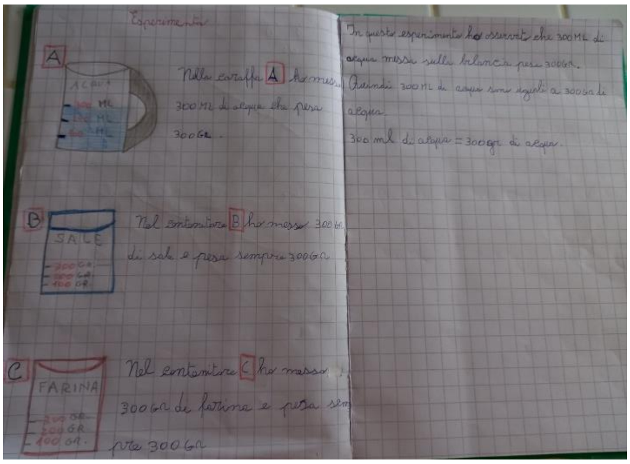

Figura 36:quaderno di Miriam.

In questo esperimento ho notato che 300 ML di acqua messa sulla bilancia pesa 300 GR.

Quindi 300 ML di acqua sono uguali a 300 GR di acqua.

300ml di acqua=300gr di acqua.

5.2.4 ATTIVITÀ 4: *PESO E VOLUME*

Successivamente si è discusso in maniera interattiva su come poter occupare gli spazi vuoti tra i materiali.

Dopo diversi tentativi, da parte dei bambini, decido di presentare una modalità che possiamo definire per "immersione".

Davanti la telecamera mostro agli alunni un becher con 150ml d'acqua e uno con 100ml di pasta. Spiego che ho precedentemente pesato la pasta e pesa 10g.

Chiedo ai bambini di ipotizzare cosa può accadere nel momento in cui la pasta viene immersa completamente nell'acqua.

Figura37:i becher contenenti la pasta e l'acqua.

Giorgia: "con l'acqua riempiamo gli spazi vuoti".

Gennaro: "la pasta affonda perché pesa di meno e l'acqua sale".

Dopo una serie di ipotesi, verso la pasta nel becher con l'acqua e domando: *"cos'è successo alla pasta e all'acqua?"*

Figura 38:il momento in cui verso la pasta nell'acqua

Figura 39:la pasta immersa nell'acqua.

Lorenzo: "gli spazi vuoti non ci sono più".

Oscar: "ora c'è l'acqua. La pasta lasciava dei buchi ma ora non più, non c'è più l'aria ma l'acqua".

Miriam: "l'acqua è salita di 10ml perché gli abbiamo messo un altro peso di 10g di pasta".

Giuseppe: "con l'acqua misuriamo il volume dei materiali".

In conclusione, il volume della pasta immersa può essere valutato come la differenza tra il volume dell'acqua prima di immergere la pasta e quello (maggiore) che possiamo leggere dopo averla immersa, da 150ml d'acqua a 160ml.

La relazione tra peso e volume, anche se non inserite direttamente nel lessico dei discenti, è stato un modo per introdurre l'algebra insieme all'aritmetica nei processi di sperimentazione, lavorando sulle relazioni tra grandezze che sono definite nelle esperienze svolte.

5.3 FEEDBACK DA PARTE DEI BAMBINI A DISTANZA DI DUE MESI

A distanza di due mesi dallo svolgimento delle attività didattiche nella 2° G, è stato somministrato un questionario ai bambini per ottenere un feedback su ciò che era stato svolto. Il questionario è articolato in tre punti:

1. Cosa ricordi delle attività svolte con la maestra Mariangela?
2. Quali difficoltà hai incontrato nello svolgimento delle attività in didattica a distanza?
3. Rappresenta attraverso un disegno l'attività che più ti è piaciuta.

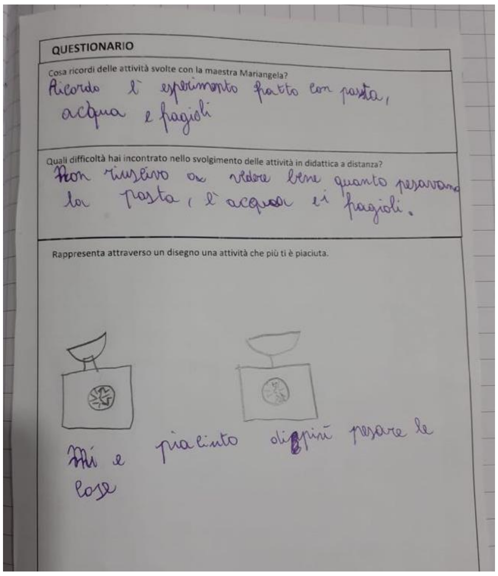

Figura 40:questionario di Lucia.

1.Ricordo l'esperimento fatto con pasta, acqua e fagioli.

2.Non riuscivo a vedere bene quanto pesavano la pasta, l'acqua e i fagioli.

3.Mi è piaciuto di più pesare le

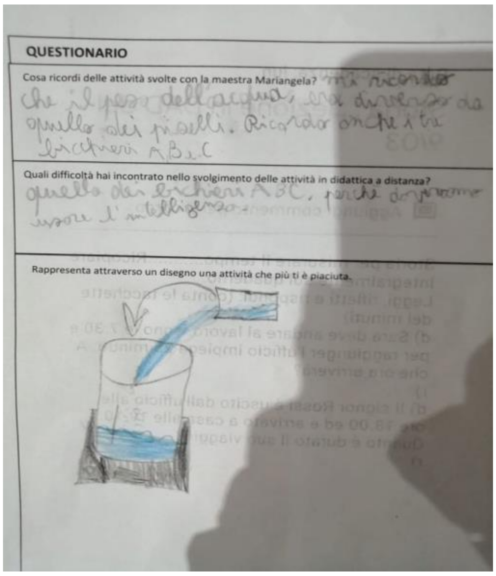

Figura 41:questionario di Oscar.

1.Il peso dell'acqua era diverso da quello dei piselli. Ricordo anche i tre bicchieri A, B e C.

2.Quello dei bicchieri A, B e C, perché dovevamo usare l'intelligenza.

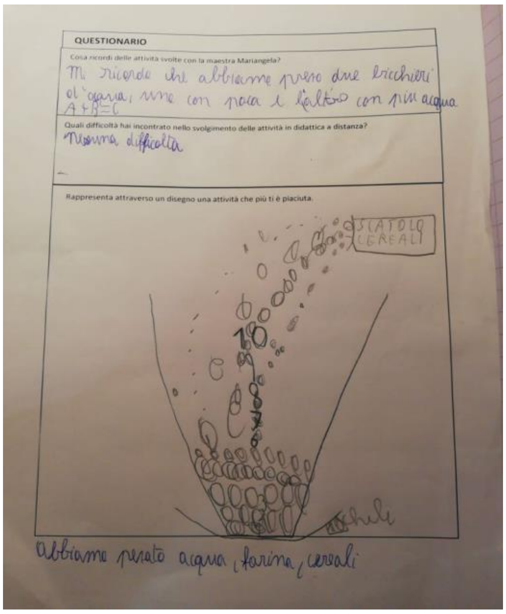

Figura 42:questionario di Gennaro.

1.Mi ricordo che abbiamo pesato due bicchieri d'acqua, uno con poca e l'altro con più acqua. A+B=C.

2.Nessuna difficoltà.

3.Abbiamo pesato acqua, farina e cereali.

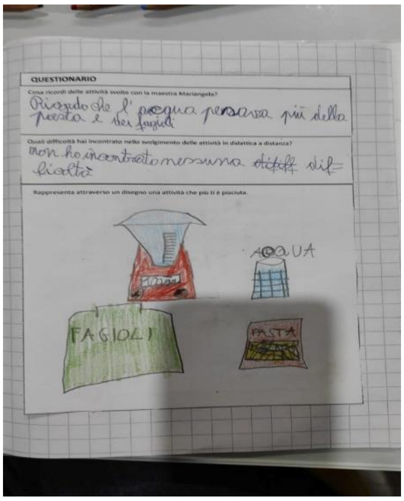

Figura 43:questionario di Giorgia.

1.Ricordo che l’acqua pesava più della pasta e dei fagioli.

2.Non ho incontrato nessuna difficoltà.

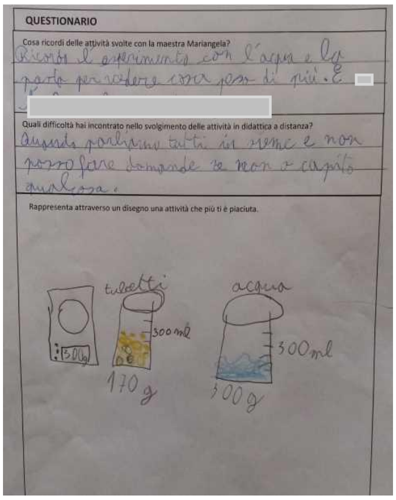

Figura 44:questionario di Giuseppe.

1.Ricordo l’esperimento con l’acqua e la pasta per vedere cosa pesa di più.

2.Quando parliamo tutti insieme e non posso fare domande se non ho capito qualcosa.

Dalle risposte dei bambini e dai loro disegni, le esperienze che sono state maggiormente ricordate e apprezzate sono state quelle di “quanto pesano i materiali?” e “peso e volume”, anche se ho riscontrato che alcuni bambini, a causa della didattica a distanza, hanno avuto delle difficoltà nell’osservare ciò che io mostravo durante le sperimentazioni.

Probabilmente solo nel caso dell’attività dei tre bicchieri d’acqua, che ha richiesto ai bambini di riscontrare le uguaglianze e disuguaglianze presenti, non è risultata a tutti semplice comprendere la consegna; infatti, un bambino ha anche affermato che è stata l’attività più difficile perché «*dovevamo usare l’intelligenza*».

In ogni caso, le attività laboratoriali hanno avuto un impatto significativo sui comportamenti degli alunni, in particolare, in relazione con gli altri e con gli oggetti utilizzati. I bambini in generale hanno paura di sbagliare e le attività sperimentali li educa ad imparare dai tentativi e dagli errori. Tali attività, così impostate, aiutano anche il più timido ad interagire con meno paure e con maggiore efficacia, perché nelle diverse dinamiche che sorgono in classe si rende conto che anche il più “bravo” o “coraggioso” è esposte ad un possibile “errore”.

5.4. INTERVISTA ALLA MAESTRA MARIA TUCCILLO

Il punto di vista dell’insegnante coinvolta nelle sperimentazioni è di fondamentale importanza per la valutazione dell’efficacia dell’intervento, per valutare le metodologie messe in atto e allo stesso tempo cogliere i punti di criticità del percorso al fine di migliorarlo. Nel seguito è riportata l’intervista alla maestra coinvolta nella sperimentazione che ho realizzato nella sua classe.

1. Cosa ne pensate del progetto svolto?

È stato svolto un ottimo lavoro nell’utilizzo degli strumenti di elaborazione e gestione progettuale.

2. Quali sono stati, secondo lei, i punti di forza e di criticità del percorso?

I punti forza sono stati: l’utilizzo delle metodologie più idonee alle esigenze degli alunni e l’attivazione di processi apprendimento significativi.

Invece, le criticità: difficoltà a realizzare attività laboratoriali, a seguito delle norme di distanziamento anti-covid 19.

3. Nei momenti successivi alle attività, quali sono state le impressioni degli alunni?

Gli alunni si sono mostrati interessati alle varie attività e si sono sentiti coinvolti emotivamente durante le varie fasi di lavoro (gioco strutturato, schede e discussione di gruppo.

4. Pensa che abbia avuto effetti positivi nell'apprendimento degli argomenti trattati o ancora da trattare?

Sì, perché si è tenuto conto della progettazione di classe e delle pratiche didattiche adottate nelle varie attività svolte nella classe.

5. Pensa che la discussione sia una valida metodologia per stimolare gli alunni alla riflessione e all'apprendimento?

Si, perché permette di ascoltare e confrontarsi con gli altri, determinando il sapere di gruppo.

6. Lei ritiene che alla lezione tradizionale, sia preferibile sostituire forme di lezioni maggiormente coinvolgenti?

Penso che la lezione frontale debba essere quotidianamente supportata dalle metodologie attive per promuovere il successo scolastico di ogni singolo alunno.

CONCLUSIONI

Al termine di questa esperienza voglio esprimere tutto l'entusiasmo che mi ha accompagnata nel corso della progettazione delle ipotesi di attività didattiche, che spero di poter mettere in pratica quanto prima, e della sperimentazione realizzata con i bambini, anche se attraverso la didattica a distanza. Nonostante il periodo, questo lavoro di tesi e, in particolare, la sperimentazione nella classe II G, mi ha resa ancora più consapevole di quanto le giuste metodologie possano favorire l'apprendimento degli alunni. Infatti, la didattica laboratoriale, nelle materie scientifiche, è di fondamentale importanza per il bambino che viene coinvolto attivamente nel processo conoscitivo, nel formulare delle ipotesi, nella sperimentazione e nel confronto con i pari e con l'insegnante.

In particolare, grazie all'esperienza che ho svolto in prima persone e a quelle che ho potuto osservare ed ascoltare durante i corsi di formazione docente, mi hanno portata a comprendere l'importanza che assume la Didattica della Fisica nella crescita dell'alunno, in quanto lo aiuta a guardare con occhi critici quanto lo circonda.

Prima di entrare a scuola, i bambini sviluppano le proprie idee in merito al mondo fisico, biologico e sociale, grazie all'esperienza. Il nostro compito, quello dell'educatore, sarà quello di partire dalle prime intuizioni del bambino per poi costruire un sapere straordinario e duraturo. Secondo questo modello, l'apprendimento è possibile grazie alla pratica, per indagare fenomeni, costruire modelli e teorie sul mondo. L'educazione scientifica non può prescindere dal coinvolgimento attivo degli alunni in attività di osservazione e sperimentazione, in quanto sarà proprio l'esperienza diretta a permettere ai bambini di partire da una base concreta da cui muovere verso l'astrazione.

Ad oggi, il modello dell'educazione scientifica si propone di indirizzare gli studenti verso una conoscenza che parta dalla pratica per poi sviluppare i propri modelli e teorie.

Nella realizzazione delle attività didattiche, di fondamentale importanza sono state la curiosità e l'interesse di tutti gli alunni; persino coloro che hanno delle difficoltà nell'apprendimento e nel partecipare attivamente alle dinamiche scolastiche sono intervenuti attivamente con sorprendenti idee e possibili spiegazioni delle problematiche a loro poste.

Durante l'osservazione e la sperimentazione diretta, gli alunni hanno elaborato nuove conoscenze, talora autonomamente, talora solo se supportati. Per tali motivi di fondamentale importanza è stato il mio intervento sia come stimolo, ponendo domande, sollecitando interventi, soluzioni e attivando una discussione, che come rinforzo, guidando versa la ricerca di una soluzione, chiedendo spiegazioni e precisazioni, utilizzando tecniche e materiali, sostenendo il comportamento partecipativo, offrendo gratificazioni e lodando al fine di motivare gli alunni.

Dunque, l'esperienza diretta, la libertà di sperimentazione, l'interazione con i compagni e il supporto, inteso come guida e non come aiuto da parte dell'insegnante, hanno rappresentato il nucleo metodologico delle proposte didattiche.

Durante lo svolgimento delle attività i bambini hanno affrontato una pluralità di temi, che posso definire multidisciplinari in quanto hanno implicato materie come la scienza, la matematica e l'arte, trattando i numeri e le operazioni matematiche, le unità di misura, il volume e il peso, e i due concetti di *discreto* e *continuo*. Nonostante questi concetti non siano stati inseriti direttamente nel lessico dei discenti, è stato un modo per introdurre l'algebra insieme all'aritmetica nei processi di sperimentazione, lavorando sulle relazioni tra grandezze che sono definite nelle esperienze svolte. I bambini, indirettamente, hanno adoperato le loro capacità per raggiungere un'interpretazione condivisa, la quale non sarebbe stata possibile se nessuno degli alunni avesse contribuito personalmente al processo di apprendimento.

Infine, di fondamentale importanza nel processo di insegnamento-apprendimento è stata la *risonanza cognitiva*. Recenti studi neuroscientifici hanno evidenziato come da un punto di vista fisiologico l'astrazione dei concetti matematici non risiede in strutture neurali specializzate, ma si sviluppa e perfezione attraverso complessi processi di inibizione, che avvengono grazie all'interazione sociale, al linguaggio e alla progressiva acquisizione culturale. Nelle dinamiche di apprendimento della matematica le sue dimensioni essenziali sono la sistemazione culturale della disciplina e la comunità all'interno della quale l'individuo percorre la sua ricerca. È proprio la *risonanza* tra la cognizione individuale, la cultura e la *risonanza* dell'interazione sociale ad agire da sfondo e costituire la chiave dinamica dello sviluppo di ogni conoscenza. Il ruolo di questo modello di funzionamento del cervello mette in primo piano il ruolo della mediazione. Infatti, l'insegnante ha il ruolo di mettere in relazione cultura e bambini sollecitando un confronto sereno, che accresce il desiderio di conoscere. Questa visione delle cose implica, oltre alla mediazione, la scelta di metodi "attivi" di acquisizione della conoscenza, che coinvolgano la persona nella sua totalità. Utilizzare degli strumenti acquisiti passivamente lasciandosi trascinare da qualcun altro, che non ci ha dato modo di sperimentarne l'utilità di tali conoscenze, non ci porta ad un uso consapevole, creativo e finalizzato di essi. Solo attraverso l'interazione vi può essere *risonanza*; l'insegnante, mediatore di *risonanza*, dovrebbe guidare l'appropriarsi, sicuro e stabile, attraverso l'uso attivo e guidato di quanto non si potrebbe mai solidificare spontaneamente.

BIBLIOGRAFIA

Arcà M., Bassino L., Degiorgi E., *Dentro la materia. Una storia di atomi, molecole, particelle*, 2008.

Aristotele, *Meteorologica*, IV secolo a.C.

Asenova M., D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Iori M. e Santi G.. *La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica,* 2020.

B. D'Amore, *Il ruolo dell'Epistemologica nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria*, 2004.

Baccaglini-Frank A., Martiglione F., Mellone M., *"Tanto quanto" a cavallo tra discreto e continuo*, 2013.

Bartolini Bussi M.G., *Matematica. I numeri e lo spazio*, 2008.

Cross C.T., Woods T.A., Schweingruber H, *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity*, in "National Academies" http://www.nap.edu/catalog/12519.html , 2009.

Dehaene S., *Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi*, traduzione di Vesentini Ottolenghi M.L., 2000.

Dehaene S., Izard V., Lemer C., Pica P., *Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group*, in "Science" vol.306, 2004

Einstein A., *Come io vedo il mondo. La teoria della relatività*, 1975.

Freudenthal H., *National Council of Teachers of Mathematics*, 1989.

Gordon P., *Numerical Cognition WithoutWords: Evidence from Amazonia*, in "Science" vol.306, 2004

Graziani P., Grimaldi G., Sangoi M., *Animali razionali. Studi sui confini e sulle possibilità della razionalità*, in "Isonomia" online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo", 2015.

Guidoni P., *Cosa si conta quando si conta, cosa si moltiplica/divide quando si ... : spiegare e capire – fra semantica e sintassi, fra discreto e continuo*, in stampa sugli atti del XI Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica" a Castel San Pietro Terme (Bo), 2007.

Joseph G., *C'era una volta un numero. La vera storia della matematica*, 2000.

Lehrer R., Schauble L., *What Kind of Explanation is a Model?*, 2010.

Lucangeli D., Sbaragli S., *Introduzione storica al concetto di cognizione numerica*, in Lucangeli D., Mammarella I.C. “Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento”, 2010.

Maffia A., Mariotti M.A., *From using artefacts to mathematical meanings: the teacher’s role in the semiotic mediation process*, in “Didattica della Matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula”,2018.

Marcone V.M., *“Learning by doing”: towards new paradigms of Work–related learning*, in “Formazione & Insegnamento”, 2017.

Marini Bettolo U., Puglisi A., Vulpiani A., *La forza dei granelli*, in “Le Scienze 408”, 2002.

Mellone M., *Un progetto didattico innovativo sulle strutture aritmetiche*, ottobre 2007.

Ministero dell’istruzione e dell’università di ricerca, *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo di istruzione*, settembre 2012.

Newton I, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1686.

Varaschin A., *Continuo o discreto: microspie in ascolto dallo spaziotempo*, in www.cnr.it/it/news/6111/continuo-o-discreto-microscopie-in-ascolto-dellospaziotempo, 7 febbraio 2021.

Zellini P., *Breve storia dell'infinito*, 2011.

Zudini V., *MatematicaMente. Dal passato al presente della didattica della matematica. Nucleo di Ricerca Didattica Dipartimento di Matematica e Geoscienze Università di Trieste*, 2014.

“Travasi. Misura, numeri, geometria, e relazioni tra grandezze” e “La cucina è un laboratorio”, in Risorse didattiche di www.les.unina.it/.

RINGRAZIAMENTI

Nel concludere il mio percorso di laurea desidero ringraziare, innanzitutto, il Prof. Emilio Balzano e il suo team, Annarita Annunziata e Giancarlo Artiano, per la disponibilità, l'entusiasmo, l'attenzione e la dedizione dimostrata durante tutta la stesura di questo lavoro di tesi.

Dopo cinque anni intensi di studi vorrei ringraziare me stessa per aver avuto il coraggio di ricominciare, per la tenacia, e per non essermi abbattuta (o quasi) nei momenti di grande difficoltà. Sono stati anni che porterò per sempre nel mio cuore.

Per il raggiungimento di questo traguardo voglio ringraziare la mia famiglia che mi ha sostenuta ed incoraggiata per tutta la durata di questo percorso. Grazie mamma per non avermi mai lasciata sola e per aver condiviso con me i successi e le sconfitte.
Grazie papà che, in religioso silenzio, hai condiviso con me questo percorso, senza aver mai smesso di credere in me e nelle mie potenzialità.
Ringrazio mio fratello Alain che, nonostante la lontananza, mi è sempre stata accanto, assistendomi in ogni singolo passo. Il bene che ti voglio è impossibile da spiegare.
A Giampiero, per essere stato sempre la mia spalla su cui piangere, sistematicamente, prima di ogni esame. Grazie per aver creduto in questo sogno insieme a me e più di me, per essere riuscito a capirmi nei miei momenti più bui e per avermi sempre guidata nelle scelte più giuste.

Un ringraziamento immenso va a te nonna, che purtroppo non potrai condividere e festeggiare questo giorno con me. Sei sempre stata fiera del mio percorso, raccontando a parenti ed amici i miei progressi. Spero che ti abbia reso orgogliosa di me.

Alle mie compagne di viaggio, ma soprattutto amiche, ai momenti che abbiamo condiviso, alle risate, alle vacanze, ai litigi e ai confronti. Entrambe avete reso le giornate universitarie più dinamiche e divertenti. Un ringraziamento a te Giulia, il diavoletto, per esserti seduta accanto a me quella mattina e per aver reso ogni problema un po' più leggero e meno spaventoso. Nelle nostre divergenze abbiamo scoperto di essere più simili di quanto pensassimo. Grazie a te Giulia, “la rossa”, per essere stata una perfetta sorella maggiore e una persona su cui poter sempre contare. Grazie per esserci stata ed avermi tranquillizzata nei momenti più difficili.

Un ultimo grazie a mia zia e ai miei cugini, per essere sempre presenti, pronti a dispensare utili consigli e saggi pareri.

Ancora grazie a tutti.