

Università degli Studi di Napoli Federico II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea Magistrale in Fisica

**Realizzazione di una proposta didattica
sulla Meccanica Quantistica per la
formazione degli insegnanti**

Relatori:

Prof. Emilio Balzano
Prof. Rodolfo Figari
Dott. Luigi Campajola

Candidata:

Annarita Annunziata
Matricola N94/65

Anno Accademico 2018-2019

Indice

Introduzione	1
1 L'insegnamento della fisica moderna	3
1.1 Alcuni percorsi didattici	5
1.1.1 Gruppo di ricerca dell'Università di Udine	5
1.1.2 Gruppo di ricerca dell'Università di Bologna	7
1.1.3 Gruppo di ricerca dell'Università di Pisa	8
1.2 Il nostro punto di vista	10
2 La proposta di insegnamento	13
2.1 Classi Quarte	17
2.1.1 Moti Armonici	17
2.1.2 Onde elastiche	23
2.1.3 Oscillatori accoppiati	32
2.2 Classi Quinte	39
2.2.1 L'esperimento della doppia fenditura	39
2.2.1.1 Interferenza con particelle materiali	40
2.2.1.2 Interferenza sull'acqua	41
2.2.1.3 Interferenza con la luce	41
2.2.1.4 Interferenza con elettroni	42
2.2.2 Probabilità	43
2.2.2.1 Meccanica classica	44
2.2.2.2 Meccanica stocastica	47
2.2.2.3 Meccanica quantistica	49
2.2.3 Macchina di Wimshurst e onde elettromagnetiche	53
2.2.4 Banco "ottico" con le microonde	55
2.2.5 Misura del rapporto e/m	58
2.2.5.1 Campo magnetico tra le bobine di Helmholtz	59
2.2.6 Spettri continui. Misura della costante di Stefan-Boltzmann.	61
2.2.7 Spettri discreti. Struttura atomica: da Thomson a Schrödinger.	64
2.2.8 Effetto fotoelettrico e misura della costante di Plank	67
2.2.9 Effetto Compton e interazione radiazione-materia	70
2.2.10 Radioattività	82
3 La sperimentazione	85
3.1 Il percorso sperimentato con le classi quarte	85
3.2 Il percorso sperimentato con le classi quinte	91
3.3 Ulteriori attività	93
3.4 Valutazione	94

<i>INDICE</i>	II
Conclusioni	103
Bibliografia	105

Introduzione

La ricerca in didattica della fisica ha sviluppato negli ultimi anni un numero considerevole di applicazioni, metodi e strategie, tanto che ormai può essere considerata un campo disciplinare autonomo, distinto sia dalla fisica stessa che dalla pedagogia, anche se a queste, come a diverse altre discipline è strettamente connesso.



Figura 0.0.1: L'immagine è stata adattata da Duit, Niedder e Schecker (2007) [1].

L'obiettivo principale di questo settore scientifico è quello di capire e migliorare i processi coinvolti nell'insegnamento e nell'apprendimento della fisica, lavorando in diversi ambiti con diverse finalità. Tra queste, le più diffuse sono volte a:

- identificare le difficoltà degli studenti;
- sviluppare metodi per affrontare queste difficoltà;
- sviluppare questionari e sondaggi per quantificare l'apprendimento degli studenti;
- investigare pensiero e atteggiamento degli studenti in relazione alla fisica;
- studiare le dinamiche di piccoli e grandi gruppi analizzando il comportamento degli studenti attraverso indagini di tipo epistemologico.

L'ambito di ricerca in cui si inserisce questo lavoro di tesi si occupa della produzione di proposte e materiali didattici, con un'attenzione particolare alle riflessioni provenienti dalla ricerca teorica e sfruttando la possibilità di utilizzare laboratori di ricerca universitari per scopi didattici. Affinché una ricerca di questo tipo abbia un impatto significativo sul processo di insegnamento-apprendimento, è necessaria una continua comunicazione e condivisione tra ricercatori ed insegnanti, in modo da avviare una graduale trasformazione del modo di insegnare la fisica. Crediamo, infatti, che l'intera struttura della fisica insegnata a scuola dovrebbe essere rivisitata in chiave didattica e che l'insegnante debba essere sostenuto dal mondo della ricerca in questo percorso.

Oltre alla collaborazione tra insegnanti e ricercatori, bisognerebbe incentivare la cooperazione tra colleghi cosicché, forti del senso di appartenenza ad un gruppo, acquistino motivazione e fiducia nel loro operato.

La nostra proposta, nata nel contesto di un corso di formazione e autoformazione¹, non è stata immaginata come una collezione di istruzioni da comunicare agli insegnanti perché le mettessero in atto. Il nostro intento è stato quello di produrre materiale da un lato estremamente flessibile, in grado di dare spunti e stimoli e di adattarsi al contesto, dall'altro sufficientemente consistente, per la ricchezza dei materiali e per le riflessioni offerte, da poter essere adottato così come progettato.

Siamo convinti che un lavoro didattico di questo tipo debba essere accompagnato dalla documentazione della sperimentazione della proposta, così che possa essere d'aiuto agli insegnanti che a tale proposta vogliono ispirarsi.

È fondamentale, inoltre, sviluppare dei metodi di valutazione. Quelli dai noi scelti sono metodi qualitativi e non quantitativi, strategie che permettono di capire la bontà della proposta attraverso materiale aperto condiviso con gli insegnanti, lasciando a quest'ultimi il compito di valutare gli studenti con i loro metodi sommativi (vale a dire i voti veri e propri).

Lo scopo del lavoro di tesi, in particolare, è stata la progettazione di una proposta didattica volta all'insegnamento della meccanica quantistica nella scuola secondaria di secondo grado.

L'idea alla base della proposta è stata quella di partire da un argomento chiave: il concetto di probabilità. Abbiamo riflettuto quindi su quali potessero essere temi e fenomeni che permettessero di discutere di probabilità in meccanica quantistica e da lì abbiamo cercato di ricostruire un percorso individuando quali argomenti dovessero essere trattati in precedenza.

Il percorso è stato delineato perché seguisse una stessa classe dal quarto al quinto anno, ma per adattarlo alle esigenze del nostro lavoro di tesi, è stato sperimentato con classi quarte e quinte di alcuni licei della provincia di Napoli.

La tesi è strutturata in tre capitoli.

Nel primo capitolo viene discusso il tema dell'insegnamento della fisica moderna e in particolare della meccanica quantistica. Vi è poi una breve panoramica sullo stato dell'arte nella ricerca in didattica della fisica attraverso la presentazione delle proposte didattiche ideate da alcuni dei più attivi gruppi di ricerca italiani. Il capitolo termina con il nostro punto di vista sulla questione e sulle riflessioni che hanno dato vita a questo lavoro di tesi.

Nel secondo capitolo è illustrata nel dettaglio la nostra proposta d'insegnamento con la discussione di tutti gli argomenti che abbiamo creduto fondamentali per arrivare all'introduzione della meccanica quantistica, dai moti armonici alle onde per le classi quarte, dal concetto di probabilità fino ad arrivare ad un esperimento complesso legato all'effetto Compton per le classi quinte.

L'ultimo capitolo è dedicato alla sperimentazione della proposta, o meglio, di una parte della proposta, dal momento che, abbiamo scelto solo alcune delle attività che ne fanno parte. Sperimentare l'intero percorso avrebbe richiesto, in questo stadio, una mole di lavoro non sostenibile in termini di tempo per tutte le persone coinvolte. Il capitolo termina con la discussione della fase di valutazione, intesa non come giudizio della preparazione degli studenti, ma come indicatore dell'efficacia del nostro lavoro.

¹Il corso, attivo dall'a.a. 2017-2018, è organizzato dalla Scuola Politecnica e delle Scienze di Base dell'Università degli Studi di Napoli Federico II e coinvolge circa 30 insegnanti di matematica e fisica della scuola secondaria di secondo grado. www.les.unina.it

Capitolo 1

L'insegnamento della fisica moderna

Fino a qualche decennio fa lo studio della fisica nella scuola secondaria di secondo grado si esauriva con la trattazione di argomenti di fisica classica. Il programma del quinto anno si concludeva con l'elettromagnetismo e non andava oltre le teorie elaborate nel corso del XIX secolo. Quella parte della fisica, comunemente detta fisica moderna, sviluppatasi a partire da XX secolo, veniva insegnata soltanto a livello universitario, a chi decideva di intraprendere un percorso di studi specialistico.

La fisica moderna racchiude due fondamentali teorie, la teoria della relatività e la meccanica quantistica, il cui insegnamento è un tema molto discusso tra i ricercatori in didattica della fisica [2]. Il dibattito è nato soprattutto in seguito alla pubblicazione delle *Indicazioni Nazionali* nel 2010, che hanno inserito esplicitamente argomenti di fisica moderna nei programmi ministeriali per l'ultimo anno del liceo. Per il liceo classico ed altri indirizzi non scientifici le indicazioni del Ministero dell'Istruzione recitano a riguardo¹:

È AUSPICABILE CHE LO STUDENTE POSSA AFFRONTARE PERCORSI DI FISICA DEL XX SECOLO, RELATIVI AL MICROCOSMO E/O AL MACROCOSMO, ACCOSTANDO LE PROBLEMATICHE CHE STORICAMENTE HANNO PORTATO AI NUOVI CONCETTI DI SPAZIO E TEMPO, MASSA E ENERGIA.

Per il liceo scientifico vanno, invece, più nel dettaglio²:

IL PERCORSO DIDATTICO COMPRENDERÀ LE CONOSCENZE SVILUPPATE NEL XX SECOLO RELATIVE AL MICROCOSMO E AL MACROCOSMO, ACCOSTANDO LE PROBLEMATICHE CHE STORICAMENTE HANNO PORTATO AI NUOVI CONCETTI DI SPAZIO E TEMPO, MASSA ED ENERGIA. L'INSEGNANTE DOVRÀ PRESTARE ATTENZIONE A UTILIZZARE UN FORMALISMO MATEMATICO ACCESSIBILE AGLI STUDENTI, PONENDO SEMPRE IN EVIDENZA I CONCETTI FONDANTI. LO STUDIO DELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA DI EINSTEIN PORTERÀ LO STUDENTE A CONFRONTARSI CON LA SIMULTANEITÀ DEGLI EVENTI, LA DILATAZIONE DEI TEMPI E LA CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE; L' AVER AFFRONTATO L'EQUIVALENZA MASSA-ENERGIA GLI PERMETTERÀ DI SVILUPPARE UN'INTERPRETAZIONE ENERGETICA DEI FENOMENI NUCLEARI (RADIOATTIVITÀ, FISSIONE, FUSIONE). L'AFFERMARSI DEL MODELLO DEL QUANTO DI LUCE POTRÀ ESSERE INTRODOTTO ATTRAVERSO LO STUDIO DELLA RADIAZIONE TERMICA E DELL'IPOTESI DI PLANCK (AFFRONTATI ANCHE SOLO IN MODO QUALITATIVO), E SARÀ SVILUPPATO DA UN LATO CON LO STUDIO DELL'EFFETTO FOTOELETTRICO E DELLA SUA INTERPRETAZIONE DA PARTE DI EINSTEIN, E DALL'ALTRO LATO CON LA DISCUSSIONE DELLE TEORIE E DEI RISULTATI SPERIMENTALI CHE

¹http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf, p. 216.

²http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf, p. 343-4.

EVIDENZIANO LA PRESENZA DI LIVELLI ENERGETICI DISCRETI NELL'ATOMO. L'EVIDENZA SPERIMENTALE DELLA NATURA ONDULATORIA DELLA MATERIA, POSTULATA DA DE BROGLIE, ED IL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE POTREBBERO CONCLUDERE IL PERCORSO IN MODO SIGNIFICATIVO. LA DIMENSIONE SPERIMENTALE POTRÀ ESSERE ULTERIORMENTE APPROFONDATA CON ATTIVITÀ DA SVOLGERSI NON SOLO NEL LABORATORIO DIDATTICO DELLA SCUOLA, MA ANCHE PRESSO LABORATORI DI UNIVERSITÀ ED ENTI DI RICERCA, ADERENDO ANCHE A PROGETTI DI ORIENTAMENTO. IN QUEST'AMBITO, LO STUDENTE POTRÀ APPROFONDIRE TEMATICHE DI SUO INTERESSE, ACCOSTANDOSI ALLE SCOPERTE PIÙ RECENTI DELLA FISICA (PER ESEMPIO NEL CAMPO DELL'ASTROFISICA E DELLA COSMOLOGIA, O NEL CAMPO DELLA FISICA DELLE PARTICELLE) O APPROFONDENDO I RAPPORTI TRA SCIENZA E TECNOLOGIA (PER ESEMPIO LA TEMATICA DELL'ENERGIA NUCLEARE, PER ACQUISIRE I TERMINI SCIENTIFICI UTILI AD ACCOSTARE CRITICAMENTE IL DIBATTITO ATTUALE, O DEI SEMICONDUTTORI, PER COMPRENDERE LE TECNOLOGIE PIÙ ATTUALI ANCHE IN RELAZIONE A RICADUTE SUL PROBLEMA DELLE RISORSE ENERGETICHE, O DELLE MICRO- E NANOTECNOLOGIE PER LO SVILUPPO DI NUOVI MATERIALI).

Quella suggerita dalle indicazioni ministeriali è quindi un'impostazione "storica", che segue in maniera più o meno rigorosa la linea cronologica delle scoperte scientifiche.

Spesso la questione dell'insegnamento di una materia tanto complessa solleva una grande quantità di critiche, considerato che in molti casi gli studenti hanno ancora difficoltà anche con argomenti di fisica classica. L'ampliamento dei programmi rischia così di limitare gli insegnanti che possono vedersi costretti a non approfondire quella parte della fisica che dovrebbe gettare le basi per poter poi affrontare argomenti più complessi.

D'altra parte, nello studio della chimica si incontrano orbitali e spin, in filosofia si parla di indeterminismo e delle concezioni di spazio e tempo, nell'arte e nella letteratura si ritrovano influenze della teoria della relatività e della meccanica quantistica. E allora come mai proprio la fisica non dovrebbe affrontare la questione? A questo, si aggiunge il fatto che ormai certi termini scientifici fanno parte del linguaggio comune e, con la tecnologia che domina la nostra quotidianità, gli studenti sono sempre più curiosi verso quelle teorie senza le quali quella tecnologia non sarebbe mai esistita, ed è importante che la didattica intervenga per fornire sistemi di comprensione.

Con particolare riferimento all'insegnamento della meccanica quantistica, argomento di questo lavoro di tesi, bisogna tener presente che si tratta di un compito a dir poco impegnativo, dal momento che la materia impone un cambiamento radicale del modo di pensare. Innanzitutto, abituati a ragionare in termini macroscopici e a rapportare alla loro esperienza quanto studiato, gli studenti si trovano spiazzati nell'affrontare il mondo dell'infinitamente piccolo. Molti aspetti della meccanica quantistica appaiono, poi, in contrasto con i metodi acquisiti nel corso dello studio della fisica classica: l'impossibilità di conoscere la posizione di una particella in un determinato istante, la descrizione in termini di probabilità, le grandezze che diventano discrete e variano in modo discontinuo. Si deve, inoltre, rinunciare ad una descrizione formale completa data la complessità degli strumenti matematici.

Alla luce di quanto esposto sin qui, risulta chiara l'esigenza di escogitare delle strategie per introdurre gli studenti allo studio della meccanica quantistica e per agevolarne la comprensione. Nel seguito verranno esposti i percorsi didattici ideati da alcuni gruppi di ricerca italiani in didattica della fisica.

1.1 Alcuni percorsi didattici

1.1.1 Gruppo di ricerca dell'Università di Udine

Il progetto del gruppo di ricerca dell'Università di Udine deve la sua ideazione in particolare al lavoro di Giancarlo Ghirardi, Renata Grassi, Marisa Michelini e Alberto Stefanel [3][4].

Il punto di partenza del percorso è il principio di sovrapposizione, declinato sullo sfondo di un argomento che può essere affrontato con il bagaglio culturale di uno studente di scuola secondaria: la polarizzazione, come proprietà quantistica della luce. I fotoni sono, quindi, descritti come particelle che si muovono nello spazio reale, mentre la formalizzazione avviene in uno spazio astratto. Gli stati di polarizzazione della luce sono infatti quantisticamente descritti da spazi vettoriali di dimensione due. Per far emergere le proprietà degli stati quantici vengono realizzati esperimenti sulla polarizzazione della luce con filtri polarizzatori e cristalli birifrangenti.

Come prima cosa si definisce il linguaggio. Si rappresentano con dei simboli le proprietà di polarizzazione lineare: * per la polarizzazione orizzontale, \triangle per la polarizzazione verticale e \diamond per quella a 45° . Gli stati dei fotoni * e dei fotoni \triangle si indicano, rispettivamente, con \mathbf{H} e \mathbf{V} , mentre ai fotoni \diamond è associato lo stato sovrapposizione $\mathbf{H} + \mathbf{V}$. Il primo aspetto quantistico si osserva quando si fanno incidere dei fotoni \diamond su un Polaroid con asse di polarizzazione verticale o orizzontale. In ciascuno dei casi, infatti, solo la metà dei fotoni passa mettendo in luce il fatto che sistemi identici tra loro possono evolvere in modo diverso tra loro e facendo emergere l'indeterminismo quantistico e il carattere probabilistico delle interazioni. Si distingue poi tra miscela statistica e stato di sovrapposizione, dapprima utilizzando un filtro Polaroid a 45° come in figura 1.1.1.

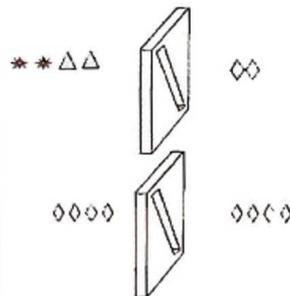


Figura 1.1.1: Distinzione tra miscela statistica e stato di sovrapposizione.

Nel caso della miscela statistica di fotoni * e \triangle solo la metà dei fotoni passano, mentre i fotoni \diamond passano tutti. Successivamente si eseguono esperimenti con due cristalli birifrangenti di calcite, posti in modo tale che il secondo compensi le deflessioni prodotte dal primo, e un filtro Polaroid a 45° (si veda la figura 1.1.2). Tutti i fotoni \diamond incidenti vengono trasmessi dal Polaroid mentre se il fascio incidente è formato dalla miscela statistica, viene trasmessa solo la metà dei fotoni. L'analisi dell'esperimento mostra, inoltre, la necessità di abbandonare il concetto classico di traiettoria, data l'impossibilità di attribuire una traiettoria definita al fotone nello stato di sovrapposizione $\mathbf{H} + \mathbf{V}$, ma anche il concetto classico di misura, i cui esiti diventano intrinsecamente probabilistici. Da qui l'analogia con gli esperimenti di interferenza e diffrazione di elettroni con un apparato a due fenditure. In questo caso, è impossibile determinare quale delle due fenditure è attraversata dai fotoni e l'intensità rivelata sullo schermo con entrambe le fenditure aperte è diversa dalla somma delle intensità rivelate con le fenditure aperte singolarmente.

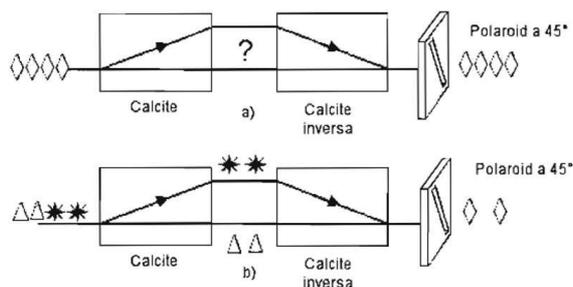


Figura 1.1.2: Esperimento con due cristalli di calcite ed un Polaroid.

Sempre nel contesto della polarizzazione, si passa poi alla formalizzazione. Gli stati quantistici vengono descritti da vettori appartenenti ad uno spazio astratto. Facendo riferimento alla figura 1.1.3, ogni fotone dell'insieme U filtrato dal primo Polaroid con direzione permessa \mathbf{u} incide su un secondo Polaroid la cui direzione permessa è \mathbf{v} e al di là del quale si trova un rivelatore D . Si vuole trovare la probabilità $P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ per i fotoni U di attraversare il secondo Polaroid e far scattare D . Secondo la legge di Malus, il rapporto tra l'intensità trasmessa e quella incidente sul secondo filtro è uguale a $\cos^2 \theta$, con θ angolo tra \mathbf{u} e \mathbf{v} . Interpretando questa quantità come il rapporto tra il numero di fotoni trasmessi e incidenti, si ha che la probabilità cercata è $P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cos^2 \theta$, da cui

$$P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2. \tag{1.1.1}$$

Qualunque sia la direzione di \mathbf{v} , il versore \mathbf{u} determina il comportamento statistico dei fotoni e fornisce una descrizione completa dei fotoni dell'insieme U . Lo stato di polarizzazione è quindi rappresentato da un vettore in uno spazio bidimensionale. Il versore \mathbf{v} rappresenta lo stato di un fotone che ha attraversato il secondo Polaroid. Se il rivelatore D scatta, allora la misura ha indotto una transizione dallo stato \mathbf{u} allo stato \mathbf{v} e la probabilità di questa transizione è data dalla relazione (1.1.1).

Ogni vettore in uno spazio bidimensionale può essere scritto come combinazione lineare di due vettori ortogonali \mathbf{H} e \mathbf{V} , attraverso la seguente relazione:

$$\mathbf{u} = \psi_1 \mathbf{H} + \psi_2 \mathbf{V}. \tag{1.1.2}$$

Le componenti ψ_1 e ψ_2 sono dette ampiezze e devono obbedire alla condizione di normalizzazione $\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1$. Poiché \mathbf{H} e \mathbf{V} sono versori, anch'essi rappresentano due possibili stati di un fotone polarizzato linearmente. Dal momento che $\psi_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{H}$ (e $\psi_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{V}$), dalla (1.1.1) discende che ψ_1^2 (ψ_2^2) è la probabilità di transizione dallo stato \mathbf{u} allo stato \mathbf{H} (\mathbf{V}). L'equazione (1.1.2) rappresenta la formulazione del principio di sovrapposizione per gli stati di polarizzazione: la combinazione lineare di due stati fisici è ancora uno stato fisico ammissibile. Si insiste poi sul fatto che il simbolo $+$ in quest'equazione non può essere considerato come l'unione di due insiemi. Combinando, infatti, le equazioni (1.1.1) e (1.1.2) si ha

$$P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \psi_1^2 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{v})^2 + \psi_2^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v})^2 + 2\psi_1 \psi_2 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}), \tag{1.1.3}$$

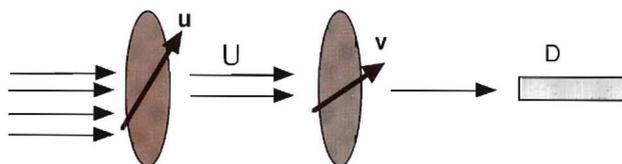


Figura 1.1.3: Due Polaroid con direzione permessa lungo i versori \mathbf{u} e \mathbf{v} e rivelatore di fotoni.

dove compare un doppio prodotto che caratterizza l'interferenza quantistica e che non può essere ottenuto con la regola della probabilità condizionata classica.

Nella trattazione si tratta soltanto la polarizzazione lineare così da poter evitare di ricorrere ai numeri complessi con i quali gli studenti non hanno familiarità.

Mediante la formula del prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \psi_1 \psi'_1 + \psi_2 \psi'_2$, si introduce una rappresentazione degli stati in termini di ampiezza, in cui ogni stato fisico viene individuato da due (n , in generale) ampiezze. Note le ampiezze è possibile, poi, determinare tutte le probabilità di transizione del sistema.

Infine, si accenna alla rappresentazione delle osservabili fisiche con operatori lineari e al metodo di calcolo del valore medio di un'osservabile.

La proposta è accompagnata da alcune schede di lavoro per proporre agli studenti i nodi principali del percorso [5].

1.1.2 Gruppo di ricerca dell'Università di Bologna

Il percorso elaborato all'università di Bologna, curato da Olivia Levrini e Paola Fantini [6], si basa sull'idea di affrontare la complessità e la problematicità della meccanica quantistica in contrapposizione a quella tendenza all'ipersemplificazione che spesso rischia di deformare sia i contenuti che il processo di apprendimento. L'obiettivo del lavoro è quello di favorire una comprensione profonda, un coinvolgimento attivo degli studenti e la formazione di un pensiero critico e autonomo.

Nell'insegnamento bisogna evitare complicazioni inutili, ma bisogna anche che si faccia attenzione a non adottare artificiose, e spesso pericolose, semplificazioni. L'ambiente di apprendimento dovrebbe, allora, costituire un territorio nel quale introdurre forme di "complessità produttiva", che valorizzino il potenziale cognitivo di ciascuno studente e lo guidino nel trovare il proprio modo di individuare e risolvere problemi.

Le principali forme di complessità produttiva considerate sono le seguenti:

- Multi-prospettiva: gli stessi contenuti fisici (fenomenologie) sono analizzati da diverse prospettive in modo da incoraggiare lo sviluppo di connessioni multiple tra contenuti e strade concettuali.
- Multi-dimensionalità: le differenti prospettive e connessioni multiple sono analizzate e confrontate anche per le loro peculiarità filosofiche ed epistemologiche, e per le loro relazioni con gli esperimenti e con il formalismo.
- Longitudinalità: il "gioco" della modellizzazione dei fenomeni quantistici è sistematicamente analizzato e confrontato con i modelli già incontrati dagli studenti durante lo studio di altri argomenti di fisica (meccanica classica, relatività ristretta, termodinamica).

Per i primi due punti, si realizzano analisi guidate di dibattiti storico-epistemologici, in modo da presentare sia le diverse visioni dei fisici coinvolti (multi-prospettiva), sia lo sviluppo di una dimensione epistemologica (multi-dimensionalità). Il sistematico confronto tra la fisica quantistica e le teorie classiche (longitudinalità) si realizza esplicitamente avendo come filo conduttore la seguente domanda: "Come cambia il concetto di oggetto nel passare dalla fisica classica alla fisica quantistica?".

La prima parte della proposta si concentra sull'analisi di alcuni importanti dibattiti storici sulla meccanica quantistica per mostrare quanto potessero essere diverse le posizioni degli scienziati che hanno dato il via allo sviluppo di questa teoria. In particolare si analizzano i dibattiti tra Heisenberg e Bohr sul principio di indeterminazione e la complementarità, tra Bohr ed Einstein sul determinismo e la relazione tra conoscenza e realtà, tra Heisenberg e Schrödinger

sulla visualizzazione di oggetti quantistici. Si guidano poi gli studenti nella lettura di alcuni scritti originali e nella riflessione sugli aspetti rilevanti.

Nella seconda parte della proposta si introduce un'analisi dettagliata degli esperimenti di Stern e Gerlach sullo spin dell'elettrone e degli esperimenti a doppia fenditura a bassa intensità luminosa, utilizzando concetti introdotti precedentemente nel contesto dei dibattiti storici: stato quantistico, operatore, autostato, autovalore, principio di sovrapposizione, principio di indeterminazione, complementarità. La struttura formale si sviluppa sulle proprietà quantistiche dello spin e sull'uso delle matrici di Pauli.

Secondo le autrici, gli insegnanti devono tener presente che per uno studio efficace della meccanica quantistica bisogna ridefinire alcuni concetti di fisica di base, introdurre formalismi sofisticati per rappresentare spazi astratti in cui definire i nuovi oggetti fisici e sviluppare nuovi paradigmi epistemologici per rimettere in discussione concetti classici come causalità, determinismo, separabilità.

1.1.3 Gruppo di ricerca dell'Università di Pisa

Il progetto per l'introduzione alla meccanica quantistica sviluppato all'Università di Pisa da Elio Fabri [7][8][9] è strutturato in tre parti denominate *I fatti*, *Il caso*, *Le ampiezze*. Il percorso ha inizio con i "fatti" della prima fisica dei quanti, passa dalla descrizione statistica dei sistemi con molte particelle, per poi arrivare al calcolo delle ampiezze di probabilità.

La prima parte affronta come argomento iniziale il *modello planetario* dell'atomo, cioè la struttura atomica stabilita da Rutherford sulla base d'indiscutibili fatti sperimentali. In seguito viene illustrato il principio secondo il quale la fisica quantistica poggia su un insieme di fatti inconciliabili con la struttura teorica della fisica classica, ma che consentono già ad un primo stadio, prima della formulazione di una teoria, di comprendere molte cose. I due fatti fondamentali sono la quantizzazione dell'energia negli atomi e la quantizzazione della radiazione elettromagnetica.

La quantizzazione dell'energia negli atomi viene illustrata proponendo l'esperimento di Frank-Hertz, scelto poiché non si tratta di un esperimento complesso, la sua interpretazione richiama concetti semplici come conservazione dell'energia, campo elettrico e potenziale ed inoltre non si limita a mostrare l'esistenza della quantizzazione dei livelli energetici, ma consente di misurare le distanze fra di essi. La trattazione fornisce poi anche una spiegazione della stabilità degli atomi, dell'esistenza degli spettri a righe e del perché nella fisica dei gas gli atomi possano essere trattati come palline senza gradi di libertà interni. A temperatura ambiente, infatti, le energie cinetiche tipiche degli atomi sono molto più piccole dei salti tra i livelli atomici ed è perciò molto improbabile che un atomo possa acquistare energia durante un urto (a rigore non impossibile, ma se si fanno i conti la probabilità è del tutto trascurabile), cosa non vera per temperature molto alte come sulla superficie o all'interno di una stella.

La quantizzazione della radiazione elettromagnetica viene introdotta attraverso l'effetto fotoelettrico e la sua spiegazione ad opera di Einstein sulla base del lavoro di Plank. La conclusione è che la radiazione elettromagnetica è costituita di particelle di energia $\varepsilon = h\nu$. Segue poi una discussione sulle caratteristiche dei fotomoltiplicatori, che non entra nei dettagli della loro costruzione, ma ne mette in luce l'utilità quando vengono investiti da luce molto debole.

La seconda parte del percorso si basa sul presupposto che una presentazione della fisica quantistica non può prescindere dagli aspetti statistici, ossia dagli effetti che la quantizzazione dei livelli produce negli equilibri statistici. L'obiettivo è di arrivare alla distribuzione di Boltzmann $n_i \propto e^{-E_i/kT}$, al teorema di equipartizione dell'energia e ottenere conseguenze importanti come la soluzione del problema dei calori specifici dei gas. La sezione si chiude con una riflessione sull'importanza dei numeri in meccanica quantistica in riferimento al ruolo essenziale che

hanno le costanti fondamentali, come la costante di Planck, la carica e la massa dell'elettrone, e poche altre.

La terza parte del percorso didattico è dedicata alla costruzione di un nuovo schema teorico che spieghi i comportamenti delle particelle quantistiche.

Si parte con una discussione sui fenomeni d'interferenza per le onde sull'acqua e le per onde sonore e poi per la luce. Si ragiona sulla riflessione su una lastra trasparente e sull'interferenza dovuta alla riflessione sulle due facce della lastra. Un'onda è descritta da un'ampiezza, che è una grandezza scalare positiva, e da una fase e quando si devono sommare due onde bisogna tener conto di entrambe. La via più semplice per far ciò è ricorrere a una rappresentazione vettoriale: ampiezza e fase sono rappresentate con un vettore nel piano, la prima ne è il modulo mentre la seconda è l'angolo che esso forma con una semiretta di riferimento. Il vettore che rappresenta la somma di due onde è, allora, il vettore ottenuto dalla somma dei due vettori con la regola del parallelogramma. Si vede così che l'ampiezza (modulo) della somma dipende non solo dalle ampiezza delle due onde, ma anche dalla differenza delle loro fasi. Nel seguito si adotta il termine "ampiezza" per indicare il vettore che riassume in sé l'ampiezza scalare e la fase.

Viene presentato poi l'esperimento di Taylor del 1909, in cui la luce è così debole che nell'apparato sperimentale non è mai presente più di un fotone alla volta. Anche in questo caso si ottiene la figura di interferenza. La conclusione è che si è costretti ad attribuire un'ampiezza al singolo fotone e a supporre che quest'ampiezza abbia proprietà del tutto simili a quella delle onde sull'acqua. In particolare, che il numero di fotoni rivelati sia proporzionale al quadrato del modulo dell'ampiezza in quel punto e che, se il fotone può arrivare in quel punto per due strade diverse, l'ampiezza risultante sia la somma (vettoriale) delle ampiezze relative a due percorsi. Inoltre, l'ampiezza di un fotone cambia fase (il vettore ruota) man mano che il fotone avanza e fa un giro completo in un percorso pari alla lunghezza d'onda della luce.

Un esperimento di interferenza permette di misurare una lunghezza d'onda, definita operativamente come il cammino lungo il quale la fase cambia di 2π . D'altra parte, l'effetto fotoelettrico consente di determinare l'energia dei fotoni e si vede che tra le due grandezze esiste una semplice relazione: $\varepsilon = hc/\lambda$.

Si chiarisce poi che il comportamento probabilistico e l'esistenza di un'ampiezza che obbedisce a un principio di sovrapposizione non sono prerogativa dei fotoni, ma di ogni altro tipo di particelle. Si discutono quindi gli esperimenti di interferenza con elettroni, neutroni e molecole dai quali si può verificare sperimentalmente la relazione predetta da de Broglie: $\lambda = h/p$.

Ci si chiede poi se c'è un modo di sapere da dove passa la particella. Di fatto, se si introduce nell'apparato sperimentale un congegno per rivelarne il passaggio la figura di interferenza scompare e l'esperimento dà l'occasione per introdurre il concetto di complementarità. L'autore si sofferma sul fatto che il moto di una particella quantistica non può essere descritto con una traiettoria. Gli esperimenti dimostrano, infatti, che una particella emessa da una sorgente e raccolta da un rivelatore "usa" allo stesso tempo tutti i percorsi possibili, ciascuno con una certa ampiezza. Si deve, quindi, gestire un "calcolo delle ampiezze" secondo regole precise, di seguito riassunte:

1. Ogni particella parte dalla sorgente con un'ampiezza, che è un vettore di modulo 1 e direzione assunta convenzionalmente orizzontale.
2. Quando la particella si propaga la sua ampiezza si propaga di un angolo, per convenzione in senso antiorario, proporzionale al percorso fatto. Il tratto in cui l'ampiezza ruota di 2π è la lunghezza d'onda $\lambda = h/p$.
3. Principio di sovrapposizione. Quando la particella ha diverse strade per andare dalla sorgente al rivelatore, l'ampiezza finale è la somma vettoriale delle ampiezze per le diverse strade.

4. La probabilità che una particella arrivi al rivelatore è data dal quadrato del modulo dell'ampiezza.

Grazie a queste regole è possibile spiegare comportamenti e fenomeni relativi alle particelle microscopiche.

Infine, sfruttando le idee sviluppate, si introduce il concetto di stato stazionario studiando la riflessione dei fotoni su due specchi paralleli affacciati, in analogia con le onde stazionarie in una corda.

L'ultima nota riguarda il principio di sovrapposizione. L'autore ritiene che la sua introduzione a livello di scuola secondaria non sia necessaria, sostenendo che i rischi di fraintendimenti sono troppo alti rispetto alla sua utilità.

1.2 Il nostro punto di vista

Quelle discusse nella sezione precedente sono solo alcune delle proposte didattiche dedicate all'introduzione della meccanica quantistica nella scuola superiore. Naturalmente esiste una letteratura vastissima a riguardo e numerose sono anche le esperienze maturate in contesti differenti come, ad esempio, le scuole estive³. Tutti questi lavori rappresentano sicuramente una risorsa dalla quale attingere e che fornisce molti spunti di indubbio interesse. Ci sembra, tuttavia, che questi percorsi non tengano conto di certi aspetti che, secondo la nostra opinione, sono centrali e che costituiscono l'ispirazione di questo lavoro di tesi.

Il principale limite che si può attribuire alle proposte descritte sta nel fatto che non mirano a costruire una visione unitaria della fisica e sembra che non prendano in seria considerazione le difficoltà che si incontrano nell'insegnamento/apprendimento della fisica in generale. In maniera più specifica, crediamo che non venga posta la dovuta attenzione sul processo di modellizzazione e sulla necessità di ricorrere anche in fisica classica ad astrazioni e schematizzazioni che rendono gli "oggetti classici" non sempre di immediata comprensione per gli studenti. Quanti sistemi o concetti, come il punto materiale o la conservazione dell'energia, che sono basilari per lo sviluppo della meccanica e ritenuti generalmente semplici, creano invece tutta una serie di incomprensioni tra gli studenti?

Così al di là delle dichiarate esigenze di uno sviluppo longitudinale dei concetti, le proposte di insegnamento della meccanica quantistica nella scuola secondaria, in riferimento ai progetti didattici, ma anche ai libri di testo, sembrano riproporre in modo semplificato quanto proposto nei corsi universitari. Tra l'altro le proposte di "innovazione" appaiono incomplete e affidano la gestione delle parti mancanti al libro, lasciando spesso agli insegnanti il difficile compito di rendere organico e coerente l'insegnamento. Ovviamente tali difficoltà riguardano tutte le proposte, e senza dubbio anche quella presentata in questo lavoro di tesi. Quello che però ci siamo sforzati di mettere in piedi è, non tanto una piccola opera d'arte, bella certamente ma che rimane in qualche modo a se stante con una certa autoreferenzialità, ma una linea di pensiero che cerchi di connettere in modo coerente le fenomenologie fondamentali con i modelli e le teorie. La debolezza del nostro lavoro sta nel fatto che abbiamo pensato ad un percorso che coinvolge gli studenti a partire dal quarto anno e non dal primo. Crediamo, però, che nella scuola si dovrebbe mettere in atto una sorta di "stravolgimento" nel modo di insegnare la fisica che richieda un impegno nel costruire, con gradualità, dopo opportune sperimentazioni, quadri di riferimento unitari e coerenti per l'intero curriculum. A questo concetto di rivisitazione abbiamo voluto

³Negli ultimi anni sono fioriti diversi corsi organizzati da gruppi di ricerca universitari o da associazioni autonome come l'AIF (Associazione per l'Insegnamento della Fisica), volti ad elevare il livello dell'insegnamento della fisica nella scuola superiore. Tra questi citiamo il master IDIFO (Innovazione Didattica in Fisica e Orientamento), un progetto nato da un'iniziativa congiunta di diverse sedi universitarie italiane, che offre la possibilità di partecipare a vari percorsi formativi e a scuole estive associate.

tendere nel contesto del corso di formazione con gli insegnati, dove il tema è stato ampiamente discusso, ad esempio, entrando nel merito dell'utilizzo dei sistemi di calcolo.

Più in particolare, sia in riferimento alle proposte analizzate, sia all'approccio storico adottato dalle indicazioni ministeriali e da quasi tutti i libri di testo (tra questi il più diffuso è l'Amaldi [10]), abbiamo individuato alcuni punti critici.

- Nel caso della radiazione elettromagnetica appare chiaro il meccanismo di formazione delle figure di interferenza legate alla potenza trasportata da campi elettrici e magnetici. È evidente anche l'interpretazione della legge di Malus, riferita all'intensità che è legata al modulo quadro del campo. Ci sembra quindi un esercizio non necessario, e probabilmente anche destabilizzante, rivisitare questi fenomeni ondulatori in chiave quantistica. Tra l'altro non aiuta a cogliere la profonda differenza tra il modulo quadro di un campo classico e il modulo quadro della funzione d'onda che è un vettore ausiliario e non una grandezza osservabile. Nel primo caso si ha, infatti, un campo e una potenza (entrambe proprietà fisiche), nel secondo caso un vettore ausiliario e una probabilità. In questo senso l'esperimento dell'interferenza di elettroni singoli⁴ sembra essere efficace per cogliere la distinzione tra la probabilità in fisica classica e meccanica quantistica, ma anche per distinguere tra stati miscela e stati di sovrapposizione.
- Tentare di evitare le iper semplificazioni può rischiare di introdurre delle iper complicazioni, in particolare quando si spingono gli studenti alla lettura di testi originali. Il premio Nobel Steven Weinberg si esprime così sul fondamentale articolo di Heisenberg del 1925: *"If the reader is mystified at what Heisenberg was doing, he or she is not alone. I have tried several times to read the paper that Heisenberg wrote on returning from Heligoland, and, although I think I understand quantum mechanics, I have never understood Heisenberg's motivations for the mathematical steps in his paper. Theoretical physicists in their most successful work tend to play one of two roles: they are either sages or magicians. It is usually not difficult to understand the papers of sage-physicists, but the papers of magician-physicists are often incomprehensible. In this sense, Heisenberg's 1925 paper was pure magic."* [13]. Lo stesso Heisenberg sosteneva che *"gli atomi o le particelle elementari non sono reali. Costituiscono un mondo di potenzialità o di possibilità piuttosto che un mondo di cose o fatti"*. Il commento di Langevin sulla quinta conferenza Solvay nel 1927 (considerato il momento in cui alla Meccanica Quantistica fu data la forma definitiva) fu: *"il momento in cui la confusione delle idee raggiunse il culmine"*. Significativa è anche la citazione di Roger Penrose: *"La teoria ha due fatti a suo favore e solo uno contro. In primo luogo, in suo favore c'è il fantastico accordo con i dati sperimentali. In secondo luogo, e per me altrettanto importante, la teoria è di una stupefacente e profonda bellezza matematica. L'unica cosa che può essere detta contro è che non ha assolutamente senso!"* [14].
Gli articoli storici, che richiamano un dibattito storico-filosofico che non è didatticamente attuale e non aggiunge ricchezza alla comprensione della teoria, difficilmente possono essere capiti e padroneggiati da studenti di scuola superiore [15].

- La teoria dell'interazione radiazione-materia sviluppata nei primi trent'anni del secolo scorso si basa su una fenomenologia di indubbio interesse, enorme importanza e grande

⁴La definizione "interferenza di elettroni singoli" implica un'interpretazione della meccanica quantistica in cui l'onda è associata in maniera univoca al singolo sistema microscopico (dualità onda-corpuscolo). Malgrado questa sia una caratteristica di molte interpretazioni, non è però necessaria. In particolare, nell'interpretazione dei molti mondi (Hugh Everett, *the multiverse theory* [11]) o nell'interpretazione statistica (Ballantine, *the ensemble interpretation of quantum mechanics* [12]) l'onda è associata alla statistica dei valori osservati relativi alle stesse condizioni iniziali. L'onda è quindi associata alle condizioni iniziali e non al singolo sistema microscopico.

fascino. Sarebbe certamente colpevole non fornire agli studenti elementi di questa fenomenologia. In particolare si pensi alla differenza tra radiazione riflessa e radiazione emessa (per esempio una fotografia diurna di una figura umana e una fotografia notturna agli infrarossi della stessa figura), alle presentazioni laboratoriali o multimediali della radiazione di "un corpo nero" reale, agli spettri di emissione e di assorbimento e alla loro efficacia nell'analisi della composizione di oggetti emittenti lontani, alle osservazioni guidate dell'effetto fotoelettrico. Scopo della presentazione di questi fenomeni sarebbe quella di convincere lo studente che la radiazione e la materia si scambiano energia in maniera quantizzata. Pensiamo però che sarebbe più colpevole provare a costruire il modello teorico della "Meccanica Ondulatoria" partendo dalle complesse trattazioni matematiche di Kirchhoff, Planck, Wien, Einstein. Oltre alle difficoltà inerenti alla mancanza di conoscenze avanzate di fisica classica (termodinamica, meccanica, elettromagnetismo e meccanica statistica), gli studenti si trovano a studiare frammenti della teoria dell'interazione tra radiazione e materia, per poi abbandonarla nella costruzione della meccanica quantistica ed eventualmente riprenderla in corsi specialistici avanzati.

A proposito della trattazione del corpo nero, nel suo libro *Guida all'insegnamento della fisica* [16], Arnold B. Arons sostiene : "*In un corso introduttivo non è possibile raccontare la storia della radiazione di corpo nero in un modo intellettualmente onesto e significativo, e un discorso approssimativo sull'argomento lascia solo disorientati gli studenti*".

Sulla base di quanto esposto sin qui, è stata sviluppata la nostra proposta di insegnamento a partire dal concetto chiave di probabilità in meccanica quantistica introdotto con l'esperimento dell'interferenza di elettroni singoli.

Capitolo 2

La proposta di insegnamento

In questo capitolo sarà presentata la proposta didattica da noi progettata. La sua struttura si basa sull'idea di sviluppare alcuni argomenti che abbiamo creduto potessero condurre ad affrontare quei nodi concettuali fondamentali per l'insegnamento della meccanica quantistica. Ci teniamo comunque a chiarire che il nostro obiettivo non è quello di ristrutturare i curricoli o di riscrivere i programmi, ma si tratta, come detto, di una proposta, di un percorso che deve essere sperimentato e che si innesta nel consueto lavoro degli insegnanti.

Quello che ci interessa in particolar modo enfatizzare è il ruolo della modellizzazione nella costruzione di una teoria e come questa sia protagonista nello studio della fisica a tutti i livelli. Non è nostra intenzione, dunque, creare una separazione tra fisica classica e fisica moderna, ma piuttosto costruire un percorso di transizione con gradualità e continuità.

Il percorso ideato dovrebbe partire dalle classi quarte e proseguire poi nelle quinte, focalizzando l'attenzione su alcuni temi di grande importanza che costituiscono la base per la costruzione di una struttura didattica che conduca all'introduzione della meccanica quantistica.

Nelle quarte si parte con il concetto di onda meccanica e quello, ad essa legato, di oscillazione. Utilizzando delle slinky (molle elicoidali) e dei pendoli si analizzano i moti armonici, il concetto di risonanza, si introducono le onde stazionarie, il principio di sovrapposizione e si chiarisce il significato di onda trasversale e longitudinale; si trattano le onde sonore e con il supporto di un microfono interfacciato ad un computer, si visualizzano le forme d'onda dei suoni prodotti da voci o da altre sorgenti (ad esempio dei diapason), per poi discutere il fenomeno dei battimenti; grazie all'utilizzo dell'ondoscopio si fa una distinzione tra onde piane e onde circolari e si analizzano tutti i fenomeni tipici delle onde, in particolare ci si concentra sulla diffrazione e sull'interferenza; infine si introducono i modi normali di un sistema di oscillatori accoppiati, con il metodo di Eulero si scrivono le equazioni alle differenze finite che vengono implementate con il foglio elettronico e si evidenzia come, se si prende un numero di oscillatori che tende ad infinito (passaggio dal discreto al continuo), si passa di fatto alla corda elastica e quindi alla propagazione di un'onda.

Nelle quinte l'idea è stata quella di iniziare con una discussione sull'interferenza in diversi contesti per poi arrivare ad introdurre l'esperimento dell'interferenza di elettroni singoli e sottolineare così la natura probabilistica della meccanica quantistica; si procede poi con un paragone con alcuni sistemi classici che vengono trattati in termini probabilistici, come il moto browniano. Prima di procedere in questa direzione bisogna sottolineare l'importanza delle condizioni iniziali che verrà fatto presentando una versione semplificata del problema a tre corpi. Le equazioni vengono scritte facendo ricorso ad uno spazio-tempo discreto così da non dover richiedere conoscenze di calcolo infinitesimale. Si ottiene, quindi, un procedimento ricorsivo individuato da equazioni alle differenze finite che può essere facilmente implementato grazie all'utilizzo del foglio elettronico. L'intervento fa in seguito "un passo indietro", avviando un discorso sulle on-

de elettromagnetiche; vengono proposte delle esperienze impiegando la macchina di Wimshurst con un rivelatore di onde elettromagnetiche e un banco ottico con le microonde (ad esempio per la polarizzazione e per l'esperimento della doppia fenditura); attraverso la presentazione dell'esperimento con il tubo di Wehnelt e le bobine di Helmholtz si esegue una misura del rapporto e/m ; l'utilizzo di uno spettrometro permette di studiare spettri di emissione continui e discreti per poi riflettere sulla struttura atomica; utilizzando una lampadina ad incandescenza con filamento di tungsteno si misura la costante di Stefan-Boltzmann; lo studio sperimentale dell'effetto fotoelettrico mediante apparato con fotodiodo e led di vari colori consente la misura della costante di Plank; si illustra un esperimento di spettroscopia gamma per l'osservazione dell'effetto Compton; si spiega il fenomeno della radioattività grazie all'ausilio di un misuratore di radiazione interfacciato al computer, con il quale si possono analizzare, ad esempio, decadimenti α , β , e γ , rivelare la radiazione di fondo, evidenziare il ruolo dello schermaggio.

Le diverse attività vengono accompagnate, quando possibile, da simulazioni disponibili in rete o, come accennato, da simulazioni numeriche effettuate con il foglio elettronico. Software e strumenti tecnologici come fogli di calcolo o programmi grafici sono risorse importanti soprattutto quando si affrontano argomenti complessi come quelli riguardanti la meccanica quantistica, dove bisogna cercare di colmare il divario tra il formalismo astratto e la comprensione qualitativa dei fenomeni.

Gli argomenti scelti per la proposta di insegnamento, le attività da svolgere per presentarli e le relative simulazioni sono riassunti nelle tabelle 2.1 e 2.2. Essi sono stati selezionati per la costruzione del nostro percorso, tenendo conto del fatto che esiste tutta una parte della fisica tra il quarto e il quinto anno (elettrostatica, campi elettrici, elettrodinamica, magnetismo, ecc) che non viene toccata, ma lasciata alla cura esclusiva dei docenti, nel cui lavoro, come precedentemente affermato, si inserisce il nostro. Naturalmente, i temi di interesse notevole e, soprattutto, fondamentali per lo sviluppo della meccanica quantistica, non si esauriscono con quelli da noi scelti, ma è possibile individuarne molti altri che possono costituire uno spunto per successive sperimentazioni.

I prossimi paragrafi sono dedicati alla descrizione dettagliata della nostra proposta di insegnamento.

Argomento	Esperimento	Simulazione
Moto armonico	Slinky	https://www.geogebra.org/m/Zt35A7dP
Moto armonico smorzato	Molle con pesetti	https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_it.html
Smorzato forzato	Pendoli	https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_it.html Metodo di Eulero con foglio elettronico
Risonanza	Molle con pesetti Coppia di diapason	https://phet.colorado.edu/sims/resonance/resonance_it.html
Onde trasversali e longitudinali	Slinky Corda elastica	https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_it.html
Principio di sovrapposizione	Slinky Corda elastica	http://ngsir.netfirms.com/j/Eng/resonanceString/resonanceString_js.htm https://www.geogebra.org/m/yRPRBabp#material/kkPNyUWy
Onde stazionarie		https://www.walter-fendt.de/html5/phit/standinglongitudinalwaves_it.htm
Onde piane e circolari Fronti d'onda e raggi Principio di sovrapposizione Diffrazione Interferenza e individuazione delle linee nodali	Onde sulla superficie dell'acqua con l'ondoscopio	https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-interference/latest/wave-interference_it.htm
Onde sonore Battimenti	Coppia di diapason Microfono con computer	https://phet.colorado.edu/it/simulation/legacy/sound https://www.walter-fendt.de/html5/phit/beats_it.htm
Oscillatori accoppiati Modi normali Molti oscillatori e equazione delle onde	Molle con carrellini Pendoli	https://phet.colorado.edu/sims/normal-modes/normal-modes_it.html Metodo di Eulero con foglio elettronico

Tabella 2.1: Attività classi quarte.

Argomento	Esperimento	Simulazione
Evoluzione in meccanica classica e dipendenza dalle condizioni iniziali	Moto armonico Problema a due e tre corpi	https://phet.colorado.edu/sims/my-solar-system/my-solar-system_it.html Simulazione con foglio elettronico
Probabilità in Meccanica Stocastica	Moto browniano e equazione di diffusione	http://galileoandstein.physics.virginia.edu/more_stuff/Applets/Brownian/brownian.html Simulazione con foglio elettronico
Probabilità in Meccanica Quantistica	Equazione di Schrödinger Interferenza di elettroni singoli	https://www.youtube.com/watch?v=FXcqUkpVQd8&t=3s https://www.compadre.org/osp/items/detail.cfm?ID=11546 Simulazione con foglio elettronico
Induzione elettromagnetica Campi elettrici e magnetici variabili Legge di Faraday Relazione $c = \lambda \nu$	Macchina di Wimshurst con rivelatore di onde elettromagnetiche Banco ottico con microonde	https://www.walter-fendt.de/html5/phit/electromagneticwave_it.htm https://phet.colorado.edu/sims/faraday/faraday_it.jar https://phet.colorado.edu/sims/html/faradays-law/latest/faradays-law_it.html
Polarizzazione Interferenza Diffrazione	Banco ottico con microonde e radiazione luminosa	
Interazione radiazione-materia	Banco ottico con microonde e pannelli di diversi materiali	https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/templateimg.php?s=jadro_zareni&l=en
Forza di Lorentz Effetto termoionico Eccitazioni atomiche	Raggio di curvatura della traiettoria degli elettroni e misura del rapporto e/m	
Spettri continui e discreti Struttura atomica	Spettrometro con lampada al tungsteno, led, torce con filtri, lampada al cadmio e al sodio	
Radiazione di corpo nero	Misura della costante di Stefan-Boltzmann con lampadina con filamento di tungsteno	www.les.unina.it/Le%20attivit%20percorsi/circuiti/ScenADCIRC3.pdf https://phet.colorado.edu/sims/blackbody-spectrum/blackbody-spectrum_it.html
Struttura atomica	Esperimento di Rutherford	https://phet.colorado.edu/sims/html/rutherford-scattering/latest/rutherford-scattering_it.html
Effetto fotoelettrico	Misura della costante di Plank con apparato con fotodiodo e led di vari colori	https://www.youtube.com/watch?v=v-1zjdUTu0o https://phet.colorado.edu/it/simulation/legacy/photoelectric
Effetto Compton Effetto fotoelettrico Produzione di coppie	Esperimento di spettroscopia gamma con scintillatore e fotomoltiplicatore	https://www.compadre.org/osp/items/detail.cfm?ID=10531
Radioattività Decadimenti α , β e γ Radiazione e distanza Statistica dei conteggi Misure di vita media Radiazione di fondo schermaggio	Esperimento di spettroscopia gamma con scintillatore e fotomoltiplicatore Sensore di radiazione con computer	https://www.walter-fendt.de/html5/phit/lawdecay_it.htm

Tabella 2.2: Attività classi quinte.

2.1 Classi Quarte

2.1.1 Moti Armonici

Il moto armonico [17][18] con il concetto di oscillazione intorno ad una posizione di equilibrio è imprescindibile in una trattazione diretta allo studio delle onde.

Partiamo dall'*oscillatore armonico libero* unidimensionale e consideriamo un corpo di massa m agganciato all'estremo libero di una molla come in figura 2.1.1, dove con $x = 0$ si è indicata la posizione di equilibrio.

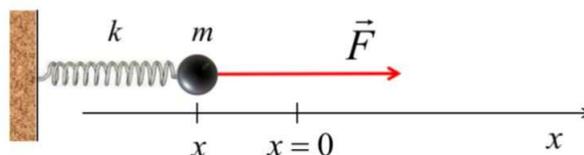


Figura 2.1.1: Oscillatore armonico libero.

Nel caso ideale in cui la molla, di costante elastica k , abbia massa trascurabile e risponda alle deformazioni secondo la legge di Hooke, la seconda legge di Newton si scrive

$$m\ddot{x} = -kx \quad (2.1.1)$$

che, ponendo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, diventa

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.1.2)$$

La soluzione generale della (2.1.2) è data da

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.1.3)$$

dove A e ϕ sono costanti fissate dalle condizioni iniziali sulla posizione e sulla velocità. La posizione è una funzione periodica nel tempo con ampiezza A . La quantità $(\omega t + \phi)$ è la fase dell'oscillazione al tempo t , mentre ω è la pulsazione dell'oscillatore, da cui si ricavano il periodo $T = 2\pi/\omega$ e la frequenza $\nu = T^{-1} = \omega_0/(2\pi)$.

Se, in aggiunta alla forza elastica, il corpo di massa m è soggetto ad una forza d'attrito proporzionale alla velocità, il sistema diventa un *oscillatore smorzato* e, chiamando β il coefficiente di smorzamento, la seconda legge della dinamica diventa

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}, \quad (2.1.4)$$

o, riarrangiando,

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.1.5)$$

con $\gamma = \beta/m$ e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ pulsazione propria dell'oscillatore libero. Nel caso di smorzamento debole, che si verifica per $\gamma < 2\omega_0$, l'oscillatore si dice sottosmorzato e la soluzione della (2.1.5) è data da

$$x(t) = A \cos(\omega_s t + \phi) e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \quad (2.1.6)$$

e ha l'andamento di figura 2.1.2. La pulsazione dell'oscillazione smorzata è $\omega_s = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}$.

Aggiungendo all'oscillatore smorzato una forza esterna periodica del tipo $F(t) = F_0 \cos(\omega_F t)$ si ottiene un *oscillatore smorzato forzato* che è governato dalla seguente equazione:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F_0 \cos(\omega_F t), \quad (2.1.7)$$

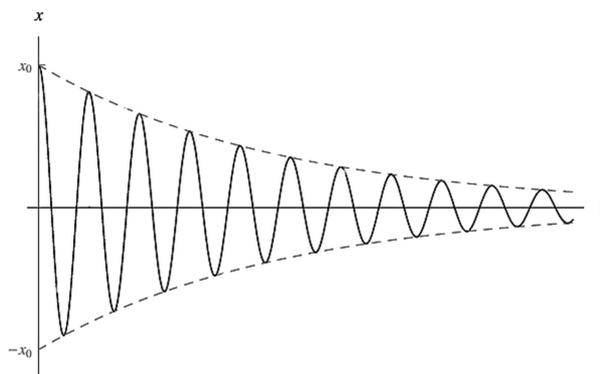


Figura 2.1.2: Andamento della posizione rispetto al tempo per un oscillatore armonico sottosmorzato.

ovvero

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t). \quad (2.1.8)$$

La (2.1.8) è un'equazione differenziale del secondo ordine non omogenea e la sua risoluzione necessita di un procedimento un po' più complesso rispetto ai due casi precedenti da cui si ricava:

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_s t + \phi) + B \cos(\omega_F t - \delta), \quad (2.1.9)$$

dove $\delta = \arctan\left(\frac{\omega_s \omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2}\right)$ e $B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + \omega_s^2 \omega_F^2}}$. Per $\omega_F = \omega_0$ si dice che il sistema è in *risonanza*. In generale, in qualunque sistema oscillante, il fenomeno della risonanza provoca un aumento significativo dell'ampiezza delle oscillazioni, che corrisponde ad un notevole accumulo di energia all'interno del sistema sollecitato.

Lo studio del moto armonico non può essere affrontato al quarto anno di liceo attraverso l'approccio teorico appena esposto. I risultati trovati possono però essere esaminati sia dal punto di vista della fenomenologia che da quello del calcolo, da un lato con attività laboratoriali di diverso tipo (con molle e pesetti, pendoli, sensori, ecc), dall'altro con metodi numerici e con le applet.

Le prime caratteristiche che vengono messe in evidenza sono la periodicità e la trasformazione continua di energia cinetica in energia potenziale, e viceversa. Abbiamo fatto misure di periodo in funzione della massa del pesetto, della costante elastica della molla e della configurazione delle molle (serie o parallelo). Grazie all'utilizzo di un sonar abbiamo visualizzato in tempo reale la legge oraria del moto. Il sensore di movimento¹ registra la posizione di un corpo inviando e ricevendo ultrasuoni. Una volta interfacciato al computer, attraverso un software specifico, mostra l'andamento della posizione, della velocità e dell'accelerazione rispetto al tempo. In figura 2.1.3 sono riportati alcuni grafici ottenuti con il sonar, utilizzando un carrellino attaccato ad una molla in oscillazione lungo un piano inclinato. L'esperienza, in particolare, serve a dimostrare che il periodo non dipende dall'inclinazione del piano e a sottolineare come la forza peso abbia la sola funzione di modificare la posizione di equilibrio. Sul piano inclinato solo una componente della forza peso agisce sulla molla e si ha un'elongazione minore (nulla per un piano orizzontale), ma il periodo di oscillazione è sempre lo stesso.

Dopo aver osservato gli andamenti qualitativi si passa ad un discorso quantitativo per la ricerca di un metodo di risoluzione delle equazioni. Dal momento che uno studente liceale non

¹Il sensore di movimento, come tutti gli altri sensori impiegati in questo lavoro di tesi, è fabbricato dalla Vernier, un'azienda statunitense che si occupa dello sviluppo e della produzione di sistemi di acquisizione dati facilmente utilizzabili per scopi didattici. www.vernier.com

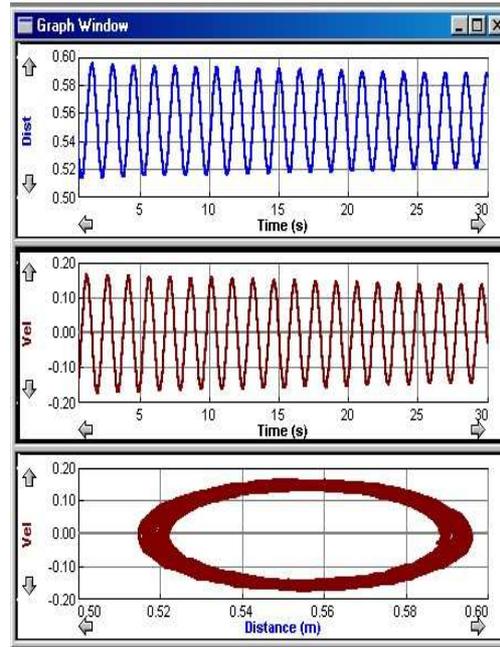


Figura 2.1.3: Grafici della legge oraria, della velocità in funzione del tempo e della velocità rispetto alla posizione di un carrello che oscilla attaccato ad una molla lungo un piano inclinato.

è in grado di risolvere le equazioni differenziali, si fa ricorso al metodo di Eulero², cioè una procedura di risoluzione numerica che può essere implementata con un foglio di calcolo. Il metodo di Eulero può essere schematizzato nei seguenti tre passi:

1. si sceglie un certo intervallo di tempo (solitamente tre/quattro periodi) e lo si divide in intervalli discreti Δt ;
2. si considerano costanti le accelerazioni in ogni intervallo Δt ;
3. si calcola lo spostamento utilizzando la velocità alla fine dell'intervallo.

Per l'oscillatore armonico libero, una volta impostate le condizioni iniziali $x_0 = x(0)$ e $v_0 = v(0)$, le formule da implementare sono

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + v_i \Delta t \\ v_i = v_{i-1} + a_{i-1} \Delta t \\ a_i = -\frac{k}{m} x_i. \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Per l'oscillatore armonico smorzato le equazioni sono identiche alle (2.1.10) per spostamento e velocità, mentre l'accelerazione va sostituita con

$$a_i = -\frac{k}{m} x_i - \frac{\beta}{m} v_i. \quad (2.1.11)$$

Nel caso dell'oscillatore smorzato forzato, la procedura di Eulero da implementare prevede le equazioni (2.1.10) sostituendo l'accelerazione con

$$a_i = -\frac{k}{m} x_i - \frac{\beta}{m} v_i + \frac{F(t)}{m}. \quad (2.1.12)$$

²Quello da noi utilizzato è il cosiddetto *metodo di Eulero implicito* che prevede la risoluzione di equazioni che contengono sia lo stato attuale del sistema che il precedente.

Nelle figure 2.1.4, 2.1.5 e 2.1.6 sono mostrati gli andamenti ottenuti con il foglio di calcolo nei tre casi diversi. Bisogna, però, fare attenzione al fatto che, nonostante le grandezze corrispondenti abbiano unità di misura diverse, per agevolare l'analisi, gli andamenti di posizione, velocità e accelerazione sono riportati sul medesimo grafico.

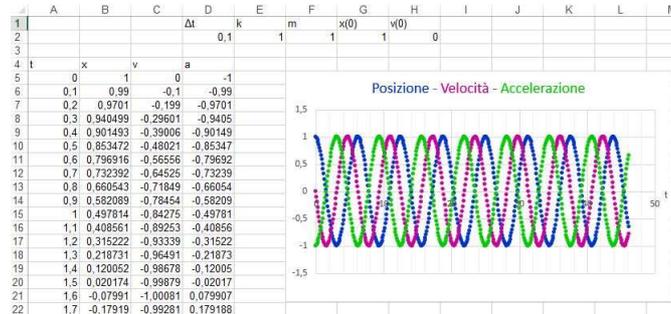


Figura 2.1.4: Metodo di Eulero con foglio di calcolo per l'oscillatore armonico libero.

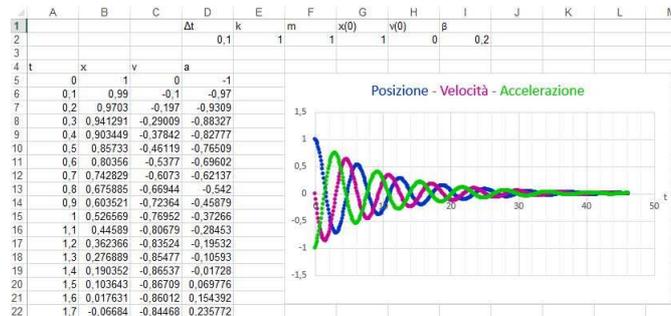


Figura 2.1.5: Metodo di Eulero con foglio di calcolo per l'oscillatore smorzato.

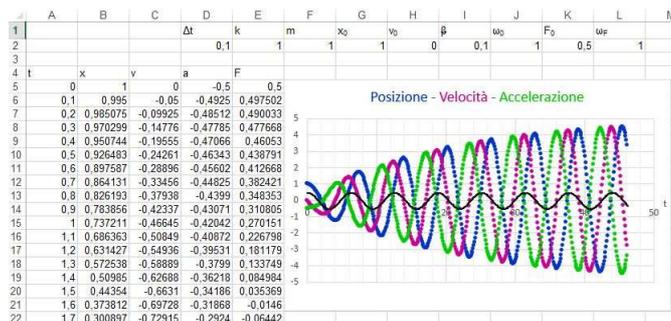


Figura 2.1.6: Metodo di Eulero con foglio di calcolo per l'oscillatore smorzato forzato in condizioni di risonanza. L'andamento sinusoidale rappresenta la forza periodica esterna.

Dopo aver discusso la soluzione numerica si passa poi all'utilizzo delle applet, chiarendo che le simulazioni non fanno altro che implementare algoritmi più sofisticati di quello di Eulero dal punto di vista della stabilità del calcolo, ma altrettanto intuitivi, e restituiscono la soluzione in maniera grafica. Danno inoltre la possibilità di entrare in un laboratorio virtuale in cui i ragazzi possono cimentarsi in misure di periodo, variando i valori delle masse e delle costanti elastiche. In figura 2.1.7 si riporta uno screenshot di un'applet di questo tipo.

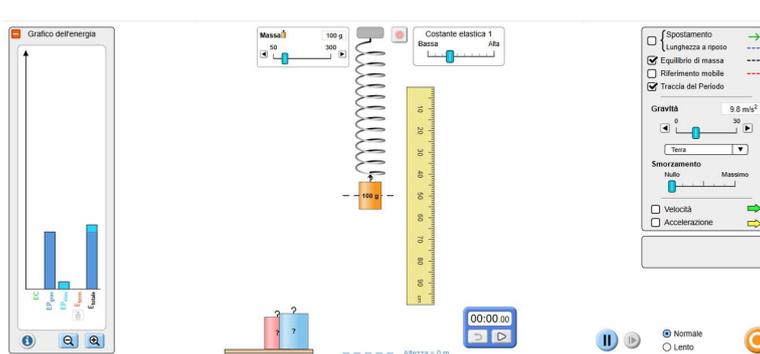


Figura 2.1.7: Screenshot di un'applet per lo studio dei sistemi masse-molle, disponibile all'indirizzo https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_it.html.

Mostrare e commentare gli andamenti della posizione, della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo, ottenuti con il sonar, con il foglio elettronico o con le applet, serve, oltre ad analizzare il moto in tutte le sue variabili, a trasmettere tutte le proprietà di queste funzioni in quanto derivate l'una dell'altra, senza però mai parlare di derivate³.

La trattazione sugli oscillatori deve essere completata con una discussione sul concetto di armonicità. L'oscillatore massa-molla si dice armonico fin quando obbedisce alla legge di Hooke, cioè fin quando la forza di richiamo è proporzionale allo spostamento, e ciò si verifica se lo spostamento dalla posizione di equilibrio è piccolo (rispetto alla lunghezza della molla). Lo stesso si può dire del pendolo (figura 2.1.8), il cui moto è armonico per piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio ($\sin \theta \sim \theta$).

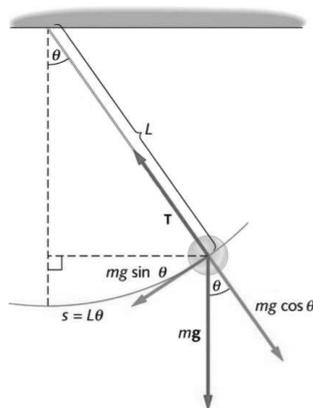


Figura 2.1.8: Pendolo semplice.

In tal caso, il periodo del pendolo è dato da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

³Insistere su uno spazio-tempo discretizzato è una maniera per poter calcolare in modo approssimato l'evoluzione dei sistemi in esame. Non si vuole però contrapporre una matematica discreta ad una continua. Lo studente andrebbe convinto che se il modello di spazio-tempo è un modello discreto, non si ha teoria finché non si decide quanto Δt o Δx debbano essere piccoli.

con L lunghezza del filo. Quando le ampiezze di oscillazione diventano grandi, si dimostra che il periodo del pendolo è dato dalla seguente espressione:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}K(m), \quad (2.1.13)$$

dove K è un integrale ellittico valutato in $m = \sin^2(\theta_0/2)$, con θ_0 ampiezza massima. È chiaro che in questa situazione si perde l'isocronismo del pendolo, in quanto il periodo dipende dall'ampiezza di oscillazione. Sviluppando l'integrale in serie di potenze e arrestando lo sviluppo al second'ordine si ottiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right]. \quad (2.1.14)$$

Servendosi di un pendolo bifilare con goniometro si è studiata la dipendenza del periodo dall'ampiezza. La misura può essere realizzata con un cronometro o con un photogate, cioè una barriera a infrarossi, interfacciata al computer (figura 2.1.9).

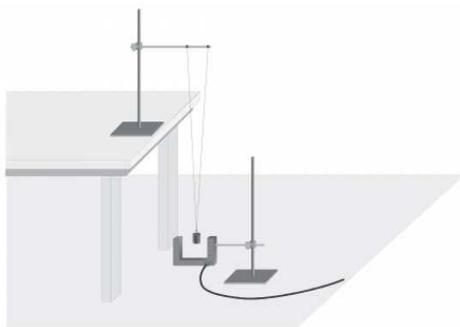


Figura 2.1.9: Pendolo con photogate.

Gli effetti di anarmonicità per grandi oscillazioni possono essere indagati anche attraverso una procedura numerica implementata con il foglio elettronico, a partire dall'equazione del moto

$$l\ddot{\theta} = -g \sin \theta. \quad (2.1.15)$$

In figura 2.1.10 è mostrata la legge oraria di un pendolo per grandi e piccole oscillazioni, ricavata numericamente.

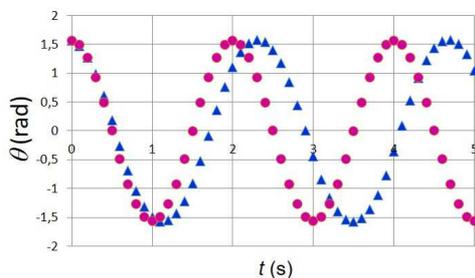


Figura 2.1.10: Legge oraria del pendolo di ampiezza $\pi/2$ confrontata con la legge oraria delle piccole oscillazioni.

In figura 2.1.11 è riportato l'andamento del periodo di un pendolo di lunghezza $L = 49$ cm in funzione dell'ampiezza, calcolato utilizzando lo sviluppo (2.1.14). In figura 2.1.12 lo stesso andamento è stato ricavato, tramite software, utilizzando il photogate con pendoli diversi.

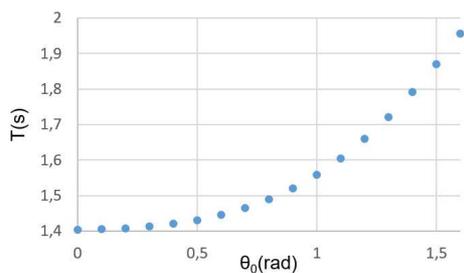


Figura 2.1.11: Grafico del periodo del pendolo con $L = 49$ cm in funzione dell'ampiezza.

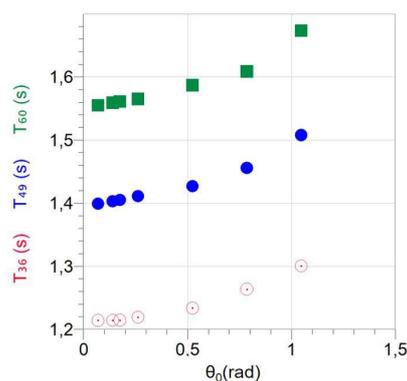


Figura 2.1.12: Misura del periodo del pendolo in funzione dell'ampiezza con il photogate per $L = 36$ cm, 49 cm, 60 cm.

Si deve sottolineare, in conclusione di questa trattazione, come il calcolo numerico, anche nelle sue forme meno sofisticate, permette di indagare, sia per la molla che per il pendolo, regimi non lineari e forzati impossibili da affrontare con i metodi analitici a disposizione di studenti di scuola superiore, ma anche dei primi anni dell'università. Le osservazioni sperimentali nelle presentazioni dimostrative servono poi a verificare i limiti dei modelli lineari e l'efficacia di quelli non lineari.

2.1.2 Onde elastiche

Le prime attività sulle onde elastiche vengono effettuate servendosi delle slinky, molle elicoidali del tipo mostrato in figura 2.1.13.

La molla slinky fu inventata nel 1943 dall'ingegnere navale Richard Thompson James mentre cercava un modo per stabilizzare i carichi sulle imbarcazioni. Quando una molla cadde dal tavolo, accorgendosi di come l'oggetto continuasse il suo moto una volta toccata terra, gli venne l'idea di trasformarla in un giocattolo.



Figura 2.1.13: Molla slinky.

Ma le slinky sono anche strumenti didattici particolarmente efficaci per lo studio dei moti armonici in prima battuta, ma di grande utilità soprattutto per l'analisi di diverse proprietà relative alla propagazione delle onde. In primo luogo si può evidenziare la differenza tra *onda longitudinale* e *onda trasversale*, generate rispettivamente imprimendo una perturbazione parallela o ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda, come mostrato in figura 2.1.14.

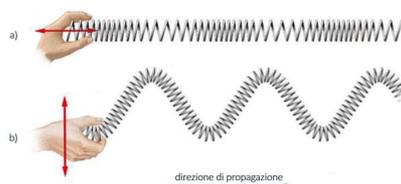


Figura 2.1.14: Onda longitudinale (a) e trasversale (b) con una molla slinky.

Altri due fenomeni che vengono analizzati sono la *riflessione* e la *trasmissione* [19]. Quando un impulso che si propaga nella molla arriva ad un'estremità fissa viene riflesso, cioè torna indietro capovolto, ma con la stessa forma dell'impulso incidente, come in figura 2.1.15. L'impulso, che si propaga con velocità \vec{v} , incontrando l'estremo fisso, esercita su di esso una forza \vec{F} . Per il terzo principio della dinamica, il vincolo esercita sulla molla una forza $-\vec{F}$, uguale in modulo a quella originaria, contraria in verso e diretta lungo la stessa retta di azione. Alla molla viene quindi impresso, con velocità $-\vec{v}$, un nuovo impulso che risulta capovolto e speculare rispetto a quello incidente.

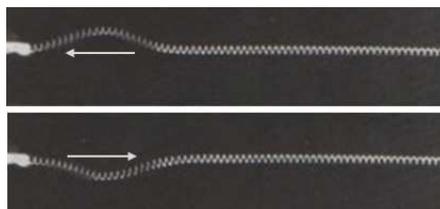


Figura 2.1.15: Riflessione di un impulso con una molla slinky.

Supponiamo, invece di fissare un capo della slinky, di collegarla ad un'altra slinky di maggiore densità. In questa situazione un impulso che raggiunga il punto di congiunzione viene in parte riflesso capovolgendosi ed in parte trasmesso nella seconda molla. Quest'effetto è illustrato in figura 2.1.16-a, dove l'impulso proviene da destra e la molla più densa è a sinistra. Se l'impulso passa dalla molla di densità maggiore a quella di densità minore, ugualmente viene in parte riflesso e in parte trasmesso, ma l'impulso riflesso è dritto come in figura 2.1.16-b. In questo caso, infatti, l'intensità della forza esercitata dalla molla più leggera è insufficiente a capovolgere l'impulso.

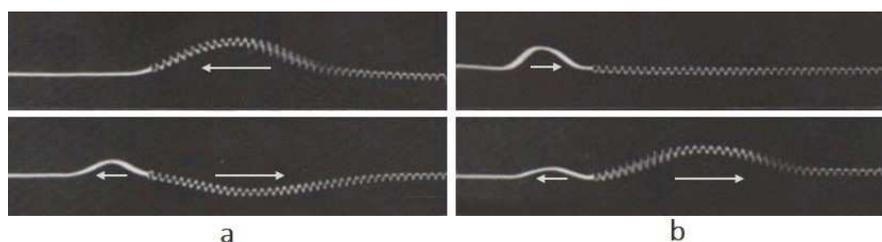


Figura 2.1.16: Trasmissione di un impulso da una molla slinky ad un'altra molla di densità maggiore (a) e viceversa (b).

Immaginiamo, infine, che lungo la molla si propagano due impulsi, uno da sinistra verso destra e l'altro in verso opposto. Quando i due impulsi si incontrano, avviene una sovrapposizione: le particelle della molla su cui gli impulsi agiscono contemporaneamente compiono uno spostamento pari alla somma algebrica dei singoli spostamenti. Dopo la sovrapposizione gli impulsi proseguono indisturbati come se non si fossero mai incontrati. Si tratta di una circostanza tipica dei fenomeni ondulatori, nota come *principio di sovrapposizione*. In particolare, per impulsi del tutto uguali, quando la sovrapposizione è totale, si ha un impulso di altezza doppia, come in figura 2.1.17-a, e si dice che si ha *interferenza costruttiva*; se, invece, sono uguali ed opposti, si annullano reciprocamente, come in figura 2.1.17-b, e si dice che si ha *interferenza distruttiva*.

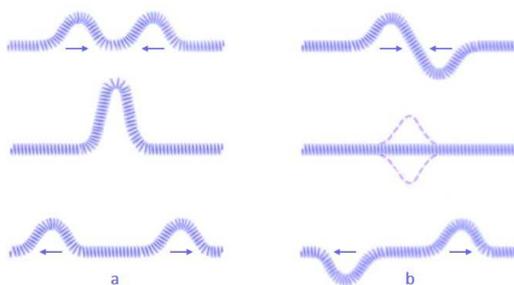


Figura 2.1.17: Sovrapposizione di due impulsi uguali (a) e di due impulsi uguali ed opposti (b).

Il principio di sovrapposizione è difficile da visualizzare sperimentalmente attraverso l'uso della slinky, a causa delle velocità in gioco e del fatto che gli impulsi rapidamente si riflettono agli estremi. Ci aiutano in questo senso le applet e le simulazioni in rete, grazie alle quali è possibile regolare le velocità di propagazione.

A partire dal fenomeno della riflessione e dal principio di sovrapposizione si possono introdurre le *onde stazionarie*, che vengono però presentate mediante l'impiego di una corda elastica.

Supponiamo di avere una corda elastica vincolata ad un'estremità che venga messa in oscillazione all'estremità libera, ad esempio mediante una lamina in vibrazione. Quando un impulso giunge all'estremo fisso, viene riflesso, cioè capovolto e rilanciato, verso la sorgente originaria, che contemporaneamente continua ad emettere nuove perturbazioni. La sovrapposizione delle onde incidenti e riflesse, tutte della stessa frequenza, può dare origine ad un particolare tipo di onda risultante, detta onda stazionaria. Per ricavare l'equazione di un'onda stazionaria, in riferimento alla figura 2.1.18, consideriamo l'onda che viaggia da sinistra verso destra nella direzione positiva delle ascisse, detta onda progressiva e descritta dalla seguente funzione:

$$y_P(x,t) = A \sin(\omega t - kx), \quad (2.1.16)$$

con $\omega = 2\pi/T$ pulsazione e $k = 2\pi/\lambda$ numero d'onda.

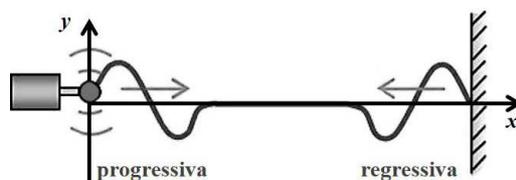


Figura 2.1.18: Onda generata (progressiva) e onda riflessa (regressiva) su una corda vincolata.

L'onda riflessa e in moto nella direzione negativa delle ascisse è detta regressiva ed è descritta da:

$$y_R(x,t) = A \sin(\omega t + kx). \quad (2.1.17)$$

Il moto di un punto sulla corda è dato dall'effetto combinato dell'onda progressiva e dell'onda regressiva, secondo il principio di sovrapposizione:

$$y(x,t) = y_P(x,t) + y_R(x,t). \quad (2.1.18)$$

Applicando la formule di prostaferesi per la somma dei seni⁴ si giunge all'espressione dell'onda stazionaria su una corda:

$$y(x,t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t). \quad (2.1.19)$$

Dalla (2.1.19) si evincono due importanti proprietà di un'onda stazionaria:

- non ci troviamo più di fronte ad un'onda progressiva o regressiva (manca un termine $\omega t \pm kx$), in altre parole non c'è propagazione lungo una certa direzione dello spazio e da qui deriva la sua denominazione;
- fissando l'ascissa di un punto sulla corda, questo oscillerà di moto armonico con ampiezza $A(x) = 2A \sin kx$; questo termine può essere, allora, interpretato come un modulatore dell'ampiezza di oscillazione e la corda vista come un insieme continuo di punti che oscillano con ampiezza $A(x)$ variabile con x .

I punti di ampiezza massima sono detti ventri, quelli che rimangono fissi sono detti nodi.

Per trovare la condizione sulle lunghezze d'onda ammesse bisogna imporre che il termine $A(x)$ si annulli nei due estremi, dove la corda rimane ferma. Per $x = 0$ la condizione è sempre soddisfatta qualunque sia il valore di lunghezza della corda L . Per $x = L$ si ha:

$$2A \sin kx = 0 \quad \implies \quad kL = \frac{2\pi}{\lambda} = n\pi \quad \implies \quad L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Per $n = 1$ si ha il *primo modo normale*, che ha due nodi e a cui corrisponde una lunghezza d'onda pari a $\lambda_1 = 2L$. In generale, il modo n -esimo, con $n + 1$ nodi, ha una lunghezza d'onda

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.1.20)$$

In figura 2.1.19 sono illustrati i primi tre modi normali sulla corda.

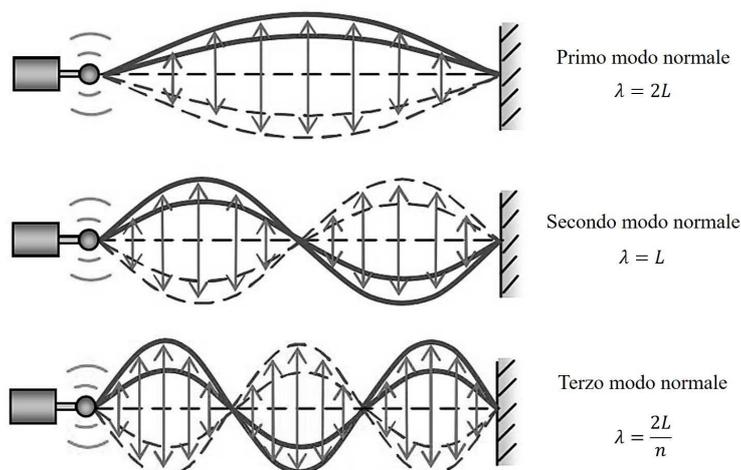


Figura 2.1.19: Modi normali su una corda.

⁴ $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

Dalla (2.1.20) si ricavano le frequenze dei modi normali:

$$v_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.1.21)$$

La frequenza v_1 è detta *armonica fondamentale* o *prima armonica*, tutte le altre si dicono *armoniche superiori*.

La velocità di propagazione di un'onda elastica in un mezzo materiale dipende dalle proprietà dinamiche ed inerziali del mezzo. Per una corda tesa la velocità vale:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_l}}, \quad (2.1.22)$$

dove τ e μ_l sono rispettivamente tensione e densità lineare della corda. Dalla (2.1.22) si ricava una nuova espressione per le frequenze dei modi normali sulla corda:

$$v_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{\tau}{\mu_l}}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.1.23)$$

In classe le onde stazionarie sulla corda vengono realizzate facendo vibrare, con diverse frequenze, un capo della corda mentre una persona tiene saldamente l'altro. In questo modo si ottengono modi normali fino a diversi ordini. Con le applet risulta poi evidente che i modi normali si ottengono per valori della frequenza multipli dell'armonica fondamentale.

La corda elastica permette, inoltre, di fare misure della velocità di propagazione di un impulso, al variare della forza di tensione.

Un'altra applicazione del principio di sovrapposizione viene illustrata trattando le onde sonore. Un'onda sonora [20] è un particolare tipo di onda in cui la perturbazione è costituita dalla variazione di pressione indotta da un corpo vibrante (sorgente) nel mezzo circostante (solitamente l'aria). Questa variazione di pressione si propaga nel mezzo come una successione di compressioni e rarefazioni e le molecole del mezzo oscillano nella stessa direzione di propagazione. Per questo motivo le onde sonore sono onde longitudinali.

Esistono tre tipi di onde sonore:

- onde sinusoidali, cioè onde periodiche descritte da una funzione sinusoidale; le particelle del mezzo oscillano di moto armonico;
- onde periodiche non sinusoidali; le particelle del mezzo oscillano di moto periodico ma non armonico;
- onde aperiodiche; le particelle del mezzo oscillano in modo caotico.

In natura, a rigore, tutte le onde sonore sono aperiodiche, essendo contraddistinte da un inizio ed una fine, sia come durata temporale che come estensione spaziale. Tuttavia, si può considerare periodica un'onda quando la sua durata nel tempo è molto maggiore del periodo. Un suono la cui forma d'onda è sinusoidale è detto suono puro, altrimenti si parla di suono complesso.

Il suono emesso da un diapason può essere considerato un suono puro. Il diapason è uno strumento formato da una forcina d'acciaio che, una volta percosso uno dei due rebbi, emette, come nota musicale, il la della terza ottava (La_3). Lo strumento è solitamente posizionato su una cassa armonica che ne amplifica il suono. La frequenza del La_3 è fissata a 440 Hz, da cui si ricava un periodo di circa due millesimi di secondo. Si può concludere, quindi, che un La_3 che si mantenga inalterato per almeno 2 secondi può a tutti gli effetti essere trattato come periodico.

Quando due onde si combinano in modo che una compressione si sovrappone sempre a una compressione e una rarefazione si sovrappone sempre a una rarefazione, in altre parole, quando

le due onde sono in fase, danno luogo a interferenza costruttiva. Viceversa, se una compressione si sovrappone sempre ad una rarefazione, le onde sono in opposizione di fase e l'interferenza è distruttiva.

Onde sonore e principio di sovrapposizione vengono studiati adoperando un sensore di suono, che non è altro che un microfono interfacciato al computer. Il relativo software permette di registrare un suono e restituisce l'andamento della pressione in funzione del tempo. La prima forma d'onda che si visualizza è quella relativa ai suoni vocalici. In figura 2.1.20 è mostrata la forma d'onda di una "A".

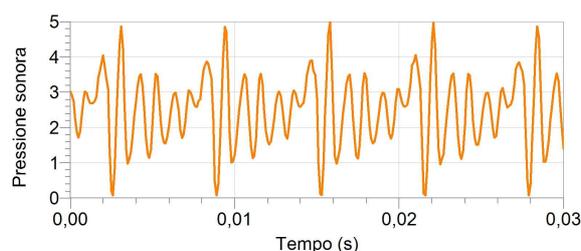


Figura 2.1.20: Suoni vocalici: forma d'onda relativa al suono di una "A".

Il software permette anche di introdurre l'idea chiave della sintesi di Fourier, dal momento che tra le sue funzionalità comprende la visualizzazione della FFT (Fast Fourier Transform). Chiaramente la questione non deve essere trattata a livello universitario con tutti i dettagli matematici, ma quello che bisogna curare è che gli studenti comprendano che una qualsiasi forma d'onda, anche la più irregolare, può essere ricondotta ad una sovrapposizione di onde sinusoidali. Non solo, questa trattazione permette di ribadire l'importanza delle onde armoniche e spiegare la ragione per cui si studiano in maniera tanto approfondita. In figura 2.1.21 è riportata la FFT relativa alla "A" precedentemente mostrata.

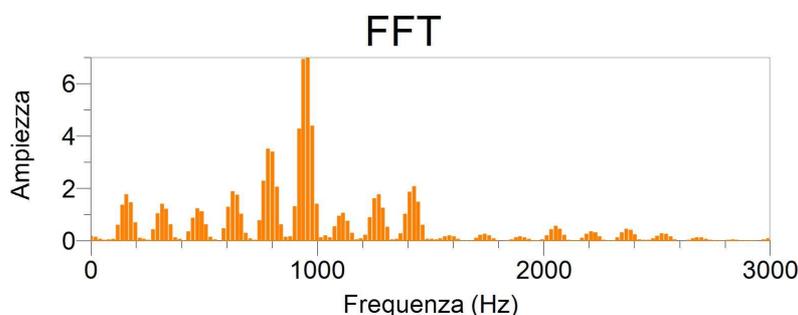


Figura 2.1.21: Scomposizione spettrale per il suono di una "A".

Se scegliamo le frequenze relative ai contributi più significativi, possiamo costruire le relative sinusoidi con il foglio elettronico e, una volta sommate si ottiene l'andamento in figura 2.1.22. È evidente che l'andamento ottenuto numericamente è del tutto simile a quello ottenuto con il sensore.

Uno dei fenomeni più noti come conseguenza del principio di sovrapposizione è il fenomeno dei *battimenti*. I battimenti sono prodotti dalla sovrapposizione di due onde sinusoidali aventi la stessa ampiezza e frequenze ν_1 e ν_2 di poco distanti tra loro ($\nu_1 - \nu_2 \ll \nu_1 + \nu_2$). Il fenomeno può essere descritto come delle variazioni periodiche dei picchi massimi e minimi dell'onda risultante, o, in altre parole, come fluttuazioni della sua intensità. La frequenza di questa nuova onda viene definita frequenza di battimento, o semplicemente, battimento.

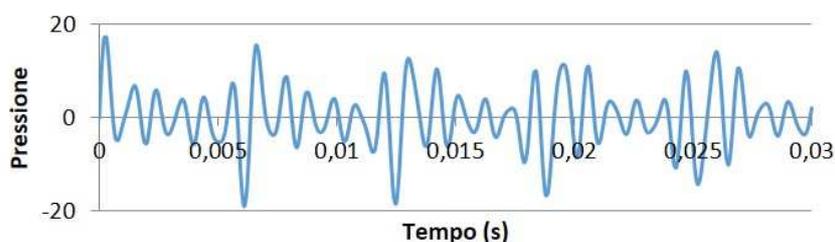


Figura 2.1.22: Ricostruzione del grafico temporale con la sintesi di Fourier realizzata con il foglio elettronico e le prime 9 componenti da 160 a 1400 Hz con step $t=0,0001s$. Le ampiezze non sono state scalate.

La spiegazione matematica del fenomeno si ottiene ricorrendo alle formule di prostaferesi. Consideriamo, quindi, due onde sinusoidali, con medesima ampiezza e frequenze vicine, che giungono in un punto fissato dello spazio, cosicché le loro equazioni si scrivano:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A \sin(\omega_1 t) = A \sin(2\pi\nu_1 t) \\ y_2(t) &= A \sin(\omega_2 t) = A \sin(2\pi\nu_2 t), \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

dove, per semplicità, abbiamo supposto che le due onde non siano sfasate. Per il principio di sovrapposizione, la perturbazione risultante è data da:

$$y(t) = A [\sin(2\pi\nu_1 t) + \sin(2\pi\nu_2 t)], \quad (2.1.25)$$

che, in base alle formule di prostaferesi, diventa:

$$y(t) = 2A \cos\left(2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t\right) \sin\left(2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t\right). \quad (2.1.26)$$

La (2.1.26) ci dice che siamo ancora di fronte ad un'onda periodica di frequenza data dalla frequenza media $\bar{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ e ampiezza

$$B(t) = 2A \cos(2\pi\nu_{\text{mod}} t) \quad (2.1.27)$$

variabile nel tempo con frequenza $\nu_{\text{mod}} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}$, detta frequenza di modulazione.

In figura 2.1.23-c è mostrata la situazione in seguito alla sovrapposizione delle due onde y_1 e y_2 : l'onda rappresentata dalla linea continua ha frequenza pari a $\bar{\nu} \sim \nu_1, \nu_2$, la curva inviluppo disegnata con linea tratteggiata rappresenta la modulazione dell'ampiezza e ha frequenza pari a ν_{mod} .

L'intensità del suono dipende dal quadrato dell'ampiezza risultante. Siccome in ogni ciclo l'ampiezza data dalla (2.1.27) si annulla due volte, l'intensità oscilla nel tempo con frequenza, pari a:

$$\nu_b = 2\nu_{\text{mod}} = \nu_1 - \nu_2, \quad (2.1.28)$$

che è la frequenza di battimento.

Il fenomeno dei battimenti viene sperimentalmente illustrato facendo uso di due diapason inizialmente identici dopo aver modificato leggermente la frequenza di uno dei due. Per far ciò basta applicare una piccola massa ad uno dei due rebbi del diapason. Battendo i due strumenti, all'ascolto si avverte distintamente che l'intensità del suono risultante non è uniforme, ma caratterizzata da rapide fluttuazioni. Come prima attività, registrando il suono dei singoli diapason con il microfono interfacciato al computer, si effettuano misure di periodo e quindi di frequenza. Visualizzando gli andamenti relativi ai due diapason, si può verificare che la frequenza del

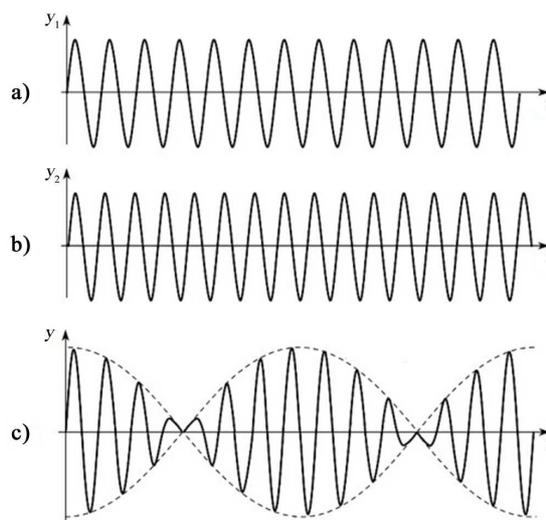


Figura 2.1.23: Fenomeno dei battimenti: le due onde sinusoidali a) e b), con frequenze vicine, si sovrappongono producendo l'onda c).

La₃ sia effettivamente 440 Hz e controllare di quanto la presenza della massa modifichi questo valore. Successivamente si visualizza il grafico della sovrapposizione e si misura la frequenza di battimento.

L'utilizzo del diapason è interessante anche per dare un'ulteriore spiegazione del fenomeno della risonanza. Se si batte un diapason reggendolo con le dita si ottiene un suono debole, ma se lo si inserisce nella cassa armonica il suono diventa intenso, a dimostrazione del fatto che sta avvenendo il fenomeno della risonanza. Per questo motivo la cassa armonica è spesso chiamata cassa di risonanza. Ancora più suggestiva e di effetto per i ragazzi è la situazione che si verifica quando, accostati due diapason identici, battendo uno dei due e arrestandone poi la vibrazione, si sente il suono provenire dall'altro. Anche se non è stato colpito, il secondo diapason si mette a vibrare per risonanza. Quest'ultimo esempio dà lo spunto per fare un salto lontano dalle onde sonore, che consente, però, di rafforzare la comprensione del concetto di risonanza. Il riferimento è ai cosiddetti pendoli di Barton. Si tende una corda e si appendono ad essa alcuni pendoli di uguale lunghezza e altri di lunghezze diverse. Mettendo in oscillazione uno di questi, dal momento che la frequenza di oscillazione propria del pendolo dipende solo dalla lunghezza del filo, tra tutti, incomincia ad oscillare soltanto il pendolo della stessa lunghezza, e lo fa grazie al fenomeno della risonanza, esattamente come succede al diapason che suona senza essere stato colpito.

Il percorso sulle onde continua poi con attività basate sull'impiego dell'*ondoscopio*, uno strumento progettato per studiare le onde sulla superficie dei liquidi (figura 2.1.24).

L'ondoscopio è costituito da una vaschetta dal fondo trasparente che viene riempita con acqua distillata. Un alimentatore elettrico mette in vibrazione un eccitatore meccanico, ossia un'asta metallica che produce le onde. La frequenza dell'onda prodotta è pari alla frequenza di vibrazione dell'eccitatore. Utilizzando un eccitatore la cui estremità è a punta, si genera un sistema di cerchi concentrici e quindi un'onda circolare; quando all'estremità si ha una sbarretta si origina un'onda piana. La superficie dell'acqua viene illuminata dall'alto con una lampada a luce stroboscopica e uno specchio, posto a 45° sotto la vaschetta, permette di riflettere la luce su uno schermo verticale. Sullo schermo si osservano le onde procedere come un insieme di zone chiare e zone scure. Le zone chiare corrispondono alle creste dell'onda, che comportandosi come lenti convergenti, mettono a fuoco la luce della lampada; le zone scure corrispondono

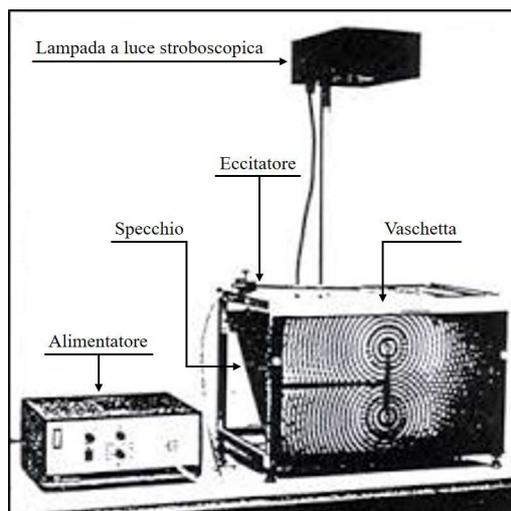


Figura 2.1.24: Ondoscopio.

alle valli, che come lenti divergenti, disperdono la luce. Sincronizzando la frequenza dello stroboscopio con la frequenza dell'eccitatore si può apparentemente fermare il moto ondoso e ottenere un'immagine stazionaria.

In figura 2.1.25 si può osservare l'immagine di un'onda piana e di un'onda circolare.

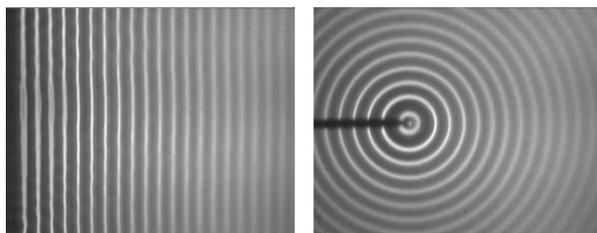


Figura 2.1.25: Immagine di un'onda piana e di un'onda circolare sullo schermo di un ondoscopio.

Il primo studio che si può fare riguarda la lunghezza d'onda. Tenendo conto dell'opportuno ingrandimento, infatti, la lunghezza d'onda λ non è altro che la distanza tra due successive zone chiare (o, alternativamente, due zone scure). Una volta misurata λ si risale alla velocità di propagazione dell'onda:

$$v = \lambda \nu,$$

con ν frequenza dell'onda.

Se nella vaschetta dell'ondoscopio si pone una striscia metallica di fronte alla sbarretta che eccita la superficie dell'acqua e inclinata rispetto ad essa, accade che i fronti d'onda si riflettono sulla striscia, modificando la propria direzione di propagazione. Le direzioni dell'onda incidente e di quella riflessa formano con la normale alla striscia due angoli uguali, in accordo con le leggi della riflessione.

Ma i fenomeni più interessanti da studiare con l'ondoscopio sono la diffrazione e l'interferenza.

Per quanto riguarda la diffrazione basta collocare al di là della sbarretta delle fenditure via via più piccole fino ad arrivare a dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda quando il fenomeno risulta del tutto evidente, come illustrato in figura 2.1.26.

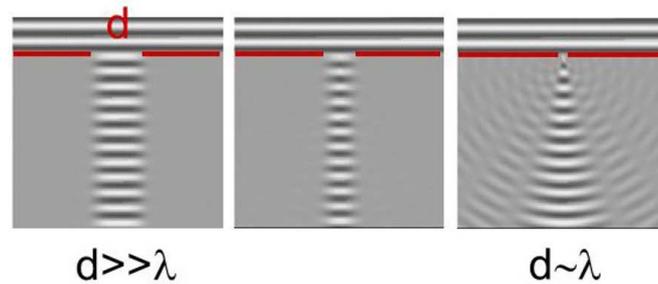


Figura 2.1.26: Diffrazione di un'onda piana sull'acqua.

Per l'interferenza si colloca come eccitatore un'asta che si biforca in due sorgenti a punta in modo da generare due onde circolari coerenti. La figura d'interferenza, come si può vedere in figura 2.1.27, appare costituita da zone molto chiare e zone molto scure che corrispondono, rispettivamente, alla sovrapposizione di due creste e due valli. Si tratta di zone di interferenza costruttiva dove si ha il massimo spostamento d'acqua. Compiono poi zone grigie dovute all'interferenza distruttiva di una cresta e una valle. Questi punti, dove l'acqua rimane pressoché indisturbata, sono distribuiti sulle cosiddette linee nodali che assumono la configurazione dei rami di un'iperbole i cui fuochi sono le sorgenti.

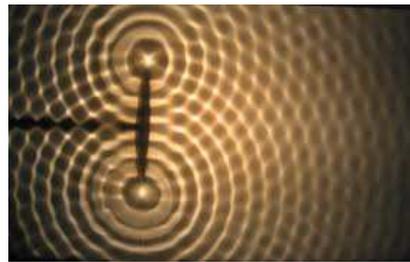


Figura 2.1.27: Interferenza di due onde circolari sull'acqua.

Utilizzando l'eccitatore per onda piana e una sbarretta con diverse fenditure di apertura confrontabile con la lunghezza d'onda si vede che ogni fenditura genera un'onda circolare che, interferendo con le altre, genera un fronte d'onda che può considerarsi piano. Grazie all'ondoscopio, si può allora introdurre il principio di Huygens e sottolineare l'importanza delle onde piane in fisica.

2.1.3 Oscillatori accoppiati

I sistemi di oscillatori accoppiati [21][22] sono di fondamentale importanza per la costruzione di un modello per le onde.

Consideriamo dapprima un sistema di due oscillatori accoppiati, costituito da due oscillatori armonici collegati da una molla, come in figura 2.1.28.

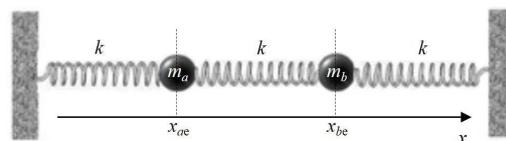


Figura 2.1.28: Sistema di due oscillatori accoppiati.

Supponiamo che le due masse siano uguali, $m_a = m_b = m$, e che le tre molle siano identiche (stessa costante elastica). Siano x_{ae} e x_{be} le posizioni di equilibrio delle due masse, e indichiamo con ψ_a e ψ_b gli spostamenti da esse. Le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} m\ddot{\psi}_a = -k\psi_a + k(\psi_b - \psi_a) = -2k\psi_a + k\psi_b \\ m\ddot{\psi}_b = -k\psi_b - k(\psi_b - \psi_a) = -2k\psi_b + k\psi_a, \end{cases} \quad (2.1.29)$$

che, posto $\omega_0^2 = k/m$, diventano

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_a = -\omega_0^2(2\psi_a - \psi_b) \\ \ddot{\psi}_b = -\omega_0^2(-\psi_a + 2\psi_b). \end{cases} \quad (2.1.30)$$

Cerchiamo delle soluzioni del tipo

$$\begin{cases} \psi_a = a \cos(\omega t + \theta) \\ \psi_b = b \cos(\omega t + \theta), \end{cases} \quad (2.1.31)$$

con a e b costanti numeriche reali. Sostituendo nelle (2.1.30) si ottiene

$$\begin{cases} -\omega^2 a \cos(\omega t + \theta) = -\omega_0^2(2a - b) \cos(\omega t + \theta) \\ -\omega^2 b \cos(\omega t + \theta) = -\omega_0^2(-a + 2b) \cos(\omega t + \theta). \end{cases} \quad (2.1.32)$$

Perché le (2.1.32) abbiano soluzione per ogni istante t , bisogna imporre l'uguaglianza tra i coefficienti del coseno. Ponendo $\alpha = \omega^2/\omega_0^2$, deve quindi accadere che

$$\begin{cases} 2a - b = \alpha a \\ -a + 2b = \alpha b. \end{cases} \quad (2.1.33)$$

Il sistema (2.1.33) può essere riscritto nella seguente forma vettoriale

$$M\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}, \quad (2.1.34)$$

dove M è la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.1.35)$$

reale e simmetrica, e \mathbf{u} il vettore

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.1.36)$$

Diagonalizzando M e risolvendo l'equazione caratteristica si trovano i due autovalori

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 3 \quad (2.1.37)$$

che corrispondono alle due pulsazioni

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{3}\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}. \quad (2.1.38)$$

Noti gli autovalori si trovano gli autovettori. Per α_1 l'autovettore ha la forma generica $A_1\mathbf{w}_1$ con A_1 generica ampiezza di oscillazione e

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.39)$$

autovettore normalizzato. La soluzione della (2.1.30) si scrive quindi

$$\begin{pmatrix} \psi_a(t) \\ \psi_b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad (2.1.40)$$

con A_1 e θ_1 fissate dalle condizioni iniziali. In questo caso la molla centrale non interviene nel moto, i due oscillatori oscillano in fase, con la stessa ampiezza e con la stessa pulsazione dell'oscillatore libero.

Per α_2 si trova

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.1.41)$$

e la soluzione si scrive

$$\begin{pmatrix} \psi_a(t) \\ \psi_b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad (2.1.42)$$

da cui si evince che i due oscillatori oscillano con la stessa ampiezza, ma in opposizione di fase. La deformazione della molla centrale risulta essere doppia rispetto alle molle laterali, per cui i due oscillatori si comportano come se fossero disaccoppiati, ma ciascuno con una molla di costante elastica tripla.

Le due soluzioni così trovate corrispondono ai cosiddetti *modi normali*. Poiché \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 costituiscono una base ortonormale di uno spazio bidimensionale, la soluzione generale è una combinazione lineare dei due modi normali:

$$\begin{pmatrix} \psi_a(t) \\ \psi_b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2). \quad (2.1.43)$$

Il formalismo dell'algebra lineare non è essenziale ai fini della risoluzione del problema, ma è utile per affrontare casi più complessi, come quello in cui gli oscillatori accoppiati sono tre, come in figura 2.1.29.

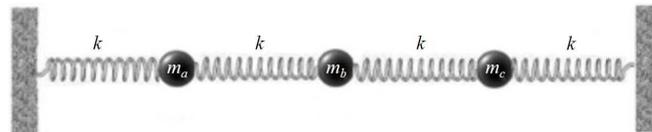


Figura 2.1.29: Sistema di tre oscillatori accoppiati.

Le equazioni del moto per le tre masse sono

$$\begin{cases} m\ddot{\psi}_a = -k\psi_a + k(\psi_b - \psi_a) \\ m\ddot{\psi}_b = -k(\psi_b - \psi_a) + k(\psi_c - \psi_b) \\ m\ddot{\psi}_c = -k(\psi_c - \psi_b) - k\psi_c. \end{cases} \quad (2.1.44)$$

e, riarrangiando,

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_a = -\omega_0^2(2\psi_a - \psi_b) \\ \ddot{\psi}_b = -\omega_0^2(-\psi_a + 2\psi_b - \psi_c) \\ \ddot{\psi}_c = -\omega_0^2(-\psi_b + 2\psi_c). \end{cases} \quad (2.1.45)$$

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cos(\omega t + \theta). \quad (2.1.46)$$

Procedendo in modo analogo al caso precedente si dovrà risolvere l'equazione vettoriale

$$M\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}, \quad (2.1.47)$$

dove stavolta la matrice M ha la forma seguente:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.1.48)$$

ed è una matrice simmetrica e reale che ammette quindi tre autovalori reali. Risolvendo l'equazione caratteristica si ottiene

$$\alpha_1 = 2 - \sqrt{2} \quad \alpha_2 = 2 \quad \alpha_3 = 2 + \sqrt{2} \quad (2.1.49)$$

da cui le pulsazioni

$$\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_0 \quad \omega_2 = \sqrt{2}\omega_0 \quad \omega_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_0. \quad (2.1.50)$$

Per gli autovettori si trova

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.51)$$

Allora, per il secondo modo normale si ha che le masse laterali oscillano in opposizione di fase mentre la massa centrale rimane ferma. Riguardo agli altri due modi normali, le masse laterali oscillano in fase, la massa centrale oscilla con un'ampiezza maggiore, in fase per il primo modo e in opposizione di fase per il terzo.

Consideriamo adesso una catena di N oscillatori identici, accoppiati come in figura 2.1.30, con N grande.

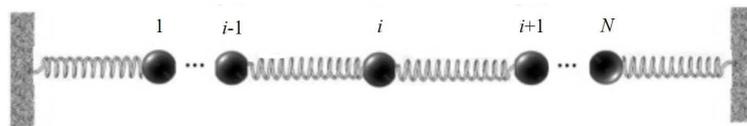


Figura 2.1.30: Sistema di N oscillatori accoppiati.

I modi normali adesso sono N e per trovarli si procede esattamente come fatto in precedenza: si scrive un sistema di N equazioni del moto, si cercano soluzioni del tipo $\cos(\omega t)$, si pone $\alpha = \omega^2/\omega_0^2$ con $\omega_0^2 = \sqrt{k/m}$. Si giunge così all'equazione agli autovalori

$$M\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}, \quad (2.1.52)$$

dove in questo caso M è una matrice $N \times N$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.1.53)$$

Chiaramente, maggiore è l'ordine della matrice più complicata diventa la sua diagonalizzazione, che in ogni caso può essere effettuata con un calcolatore attraverso opportuni algoritmi. Quello che è interessante è andare a vedere come sono fatti gli autovettori con frequenza più bassa nel limite di N che tende ad infinito. In altre parole, effettuiamo il passaggio dal sistema discreto di oscillatori, ad un sistema continuo che non è altro che una corda elastica. Sia x_i la coordinata della particella i -esima e $\psi(x_i, t)$ la funzione che descrive le deformazioni locali della corda. L'equazione del moto di questa particella si scrive:

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x_i, t) = -k[\psi(x_i, t) - \psi(x_{i-1}, t)] + k[\psi(x_{i+1}, t) - \psi(x_i, t)] \quad (2.1.54)$$

che riarrangiando e ponendo $\omega_0^2 = k/m$ diventa

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x_i, t) = -\omega_0^2 [-\psi(x_{i-1}, t) + 2\psi(x_i, t) - \psi(x_{i+1}, t)] \quad (2.1.55)$$

Per quanto visto nei casi precedenti ci si aspetta che, per i modi di bassa frequenza, le particelle vicine tendano ad oscillare in fase e che quindi gli spostamenti differiscano di poco tra particelle vicine. In pratica, detta d la distanza tra due particelle a riposo, possiamo assumere che la funzione $\psi(x, t)$ vari lentamente sulla scala di d . Allora dato il valore di $\psi(x, t)$ nel punto x_i , i valori nei punti primi vicini possono essere calcolati con uno sviluppo in serie di potenze:

$$\begin{aligned} \psi(x_{i-1}, t) &= \psi(x_i, t) - d \frac{\partial}{\partial x} \psi(x_i, t) + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x_i, t) + \dots \\ \psi(x_{i+1}, t) &= \psi(x_i, t) + d \frac{\partial}{\partial x} \psi(x_i, t) + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x_i, t) + \dots \end{aligned} \quad (2.1.56)$$

Sostituendo le (2.1.56) nell'equazione 2.1.55, all'ordine più basso in d si ottiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x_i, t) = \omega_0^2 d^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x_i, t), \quad (2.1.57)$$

equazione che deve essere valida per ogni punto compreso tra $x_i = 0$ e $x_i = L$, dove L è la distanza tra i due estremi della catena. Tenendo conto che il prodotto $\omega_0^2 d^2$ è costante ed ha le dimensioni di una velocità, la (2.1.57), eliminando il pedice dalla coordinata, può essere riscritta come

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) = 0, \quad (2.1.58)$$

che è la famosa equazione delle onde. La velocità v è la velocità di fase e si dimostra essere proprio la velocità di propagazione della deformazione.

Se la catena è infinita e non ci sono vincoli agli estremi, la soluzione dell'equazione delle onde è della forma $\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, dove qui k è il numero d'onda legato ad ω dalla relazione $v = \omega/k$. Nel caso della catena vincolata con condizioni al contorno $\psi(0, t) = \psi(L, t)$, le soluzioni sono del tipo

$$\psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (2.1.59)$$

con

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad (2.1.60)$$

e A_n e ϕ_n , ampiezza e fase, costanti di integrazione. Queste oscillazioni, non sono altro che le onde stazionarie trattate nella sezione precedente, soltanto che in questo caso si tratta di onde stazionarie longitudinali, e costituiscono i modi normali della corda. Le onde stazionarie trasversali si trovano considerando spostamenti verticali.

La teoria appena discussa non si può proporre agli studenti del quarto anno del liceo. Quello che si può fare è utilizzare molle e carrellini per visualizzare il moto degli oscillatori accoppiati, discutere il concetto di accoppiamento (debole o forte a seconda della costante elastica delle molle che li collegano), sottolineare come l'energia venga trasferita da un oscillatore all'altro e notare come i modi normali dipendano dalle condizioni iniziali del sistema. Una volta osservata la fenomenologia, si passa alla ricerca di soluzioni numeriche con il foglio di calcolo, implementando una procedura numerica come fatto per l'oscillatore armonico. In figura 2.1.31 è mostrato il foglio di calcolo che abbiamo costruito per un sistema di due oscillatori accoppiati, dove per la posizione iniziale dei due oscillatori è stato inserito lo stesso valore.

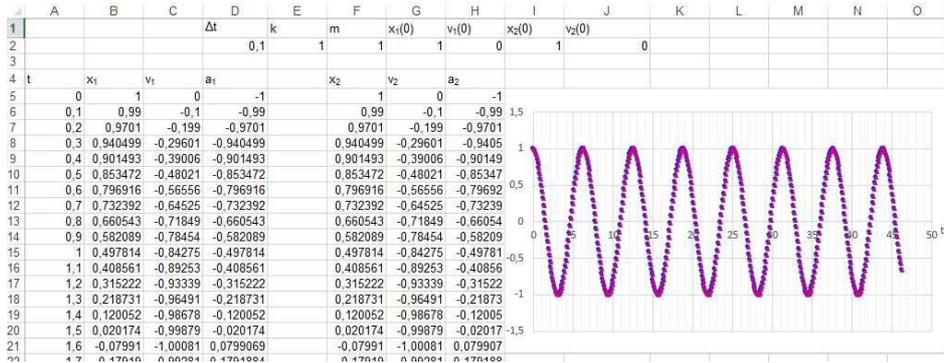


Figura 2.1.31: Foglio di calcolo per un sistema di due oscillatori accoppiati relativo al primo modo normale.

Le due masse oscillano in fase, ed infatti i due andamenti sono sovrapposti: si ottiene il primo modo normale. Se le due posizioni iniziali hanno un valore uguale, ma opposto, si ottiene il secondo modo normale, come in figura 2.1.32.

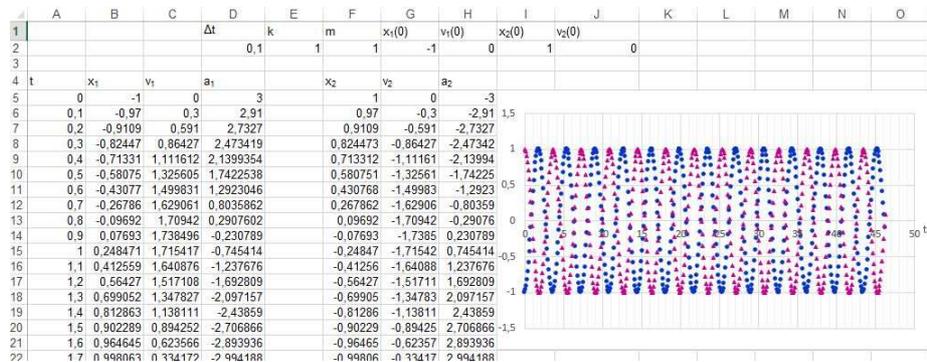


Figura 2.1.32: Foglio di calcolo per un sistema di due oscillatori accoppiati relativo al secondo modo normale.

La stessa procedura si applica quando gli oscillatori accoppiati sono tre. Con una semplice operazione di copia e incolla abbiamo studiato con il foglio di calcolo un sistema di oscillatori accoppiato con N sempre più grande. Nella simulazione riportata in figura 2.1.33 ci siamo fermati a $N = 14$. I grafici riproducono gli andamenti della posizione rispetto al tempo dei primi quattro oscillatori, dai quali si evince come la deformazione si propaghi nel tempo lungo la catena.

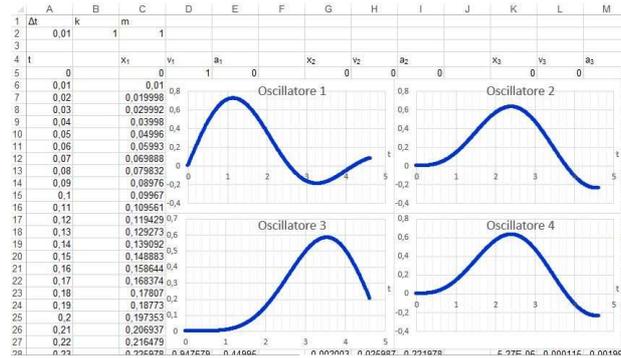


Figura 2.1.33: Foglio di calcolo per un sistema di N oscillatori accoppiati.

Un ulteriore tipo di sistema di oscillatori accoppiati è quello formato da pendoli collegati tra loro da una molla. In figura 2.1.34 sono illustrate le configurazioni relative al primo e secondo modo normale per due pendoli accoppiati e sono indicate le rispettive pulsazioni.

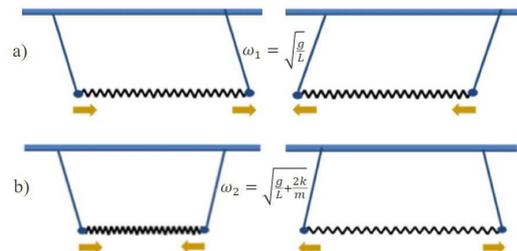


Figura 2.1.34: Primo (a) e secondo (b) modo normale per due pendoli di lunghezza L accoppiati mediante una molle di costante elastica k .

Il moto più generale possibile è dato dalla sovrapposizione dei due modi normali di oscillazione. Se, ad esempio, si mette in oscillazione uno dei due pendoli tenendo inizialmente fermo l'altro, si osserva un alternarsi periodico dell'entrata in oscillazione di ciascun pendolo. Si verifica, analiticamente (applicando le formule di prostaferesi alle soluzioni generali per i pendoli con le opportune condizioni iniziali) e sperimentalmente, grazie all'utilizzo del sonar, che la configurazione risultante rappresenta un battimento, proprio come accadeva per i due diapason con frequenze di poco distanti. L'esperienza con il sonar (figura 2.1.35) è stata effettuata per valori diversi sia della lunghezza dei pendoli che della costante elastica della molla.

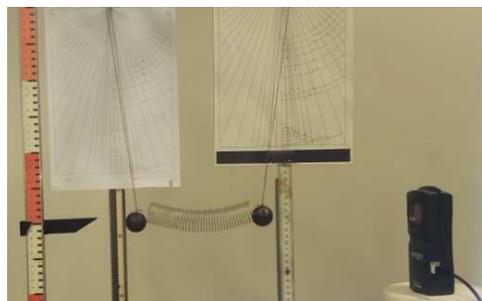


Figura 2.1.35: Pendoli accoppiati e sensore di moto.

In figura 2.1.36 sono mostrati gli andamenti raccolti per valori decrescenti della costante elastica della molla di accoppiamento.

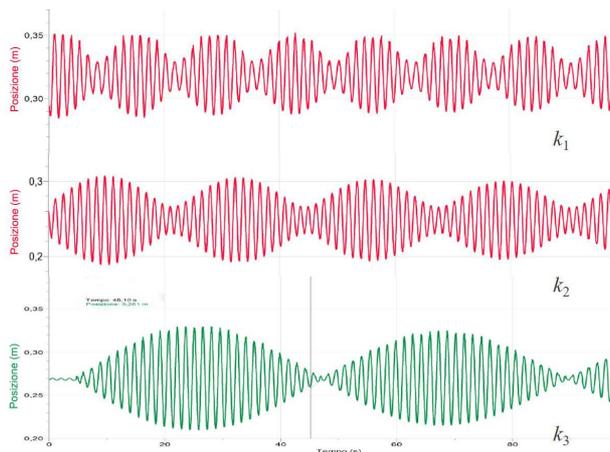


Figura 2.1.36: Due pendoli accoppiati con accoppiamento decrescente ($k_1 > k_2 > k_3$).

Un altro esempio di sistema di oscillatori accoppiati che si può mostrare in classe è fornito dal pendolo di Newton (figura 2.1.37). Quest'oggetto, oltre ad essere didatticamente utile per spiegare le leggi della conservazione della quantità di moto e dell'energia, chiarisce ulteriormente il concetto di accoppiamento, dal momento che i singoli pendoli possono essere considerati accoppiati da molle di costante elastica infinita.



Figura 2.1.37: Pendolo di Newton.

2.2 Classi Quinte

2.2.1 L'esperimento della doppia fenditura

Piuttosto che partire dal dibattito che ha avuto luogo nel primo quarto del secolo scorso seguendo un approccio di tipo storico, ci si può affacciare per la prima volta alla meccanica quantistica proponendo un esperimento moderno messo a punto nel 1976 all'Università di Bologna: l'interferenza di elettroni singoli. Di questo tipo di esperimento si iniziò a parlare già intorno agli anni trenta, ma solo come esperimento mentale. Per molto tempo fu infatti ritenuto impossibile da realizzare in laboratorio, per le difficoltà tecniche che comportava. Si riusciva a lavorare con fasci di particelle neutre (per evitare la repulsione elettrostatica), ma non con le singole particelle (l'unica maniera per farlo con gli elettroni era a bassissima intensità e quindi, idealmente, se ne sarebbe avuto uno alla volta).

Un ruolo determinante nella realizzazione dell'esperimento lo hanno avuto tre fisici e microscopisti elettronici italiani: Giulio Pozzi, Gian Franco Missiroli (del Dipartimento di Fisica dell'Università di Bologna) e Pier Giorgio Merli (del CNR-LAMEL, oggi CNR-IMM - Istituto per la Microelettronica e i Microsistemi - Bologna). Ai tre si deve il primo resoconto dell'esperimento pubblicato nel 1976 sull'*American Journal of Physics* [23]. Nel 2002 l'interferenza di elettroni singoli è stata votata dai lettori della rivista *Physics World* come l'esperimento più

bello della fisica e a quel tempo il promotore del sondaggio, il filosofo e storico delle scienze Robert P. Crease, affermò:

L'esperimento permette di capire immediatamente il significato fisico della funzione d'onda associata all'elettrone. Esso contiene l'essenza della meccanica quantistica. Ha tutte le caratteristiche che permettono di definire un esperimento bello. È di importanza strategica, nel senso che è capace di convincere anche il più scettico sui fondamenti della meccanica quantistica. È semplice, facile da capire, nonostante i suoi risultati siano rivoluzionari. Il mondo della meccanica quantistica è e rimarrà assolutamente lontano dal nostro intuire, indipendentemente da quanto si conosca la teoria. L'esperimento di interferenza con elettroni singoli pone la realtà dinanzi ai nostri occhi in modo semplice, chiaro e coinvolgente. È quindi presumibile che rimarrà nel pantheon degli esperimenti meravigliosi per molti anni a venire.

Anche Richard Feynmann riconosceva l'enorme valore scientifico di questo esperimento tanto che era solito ripetere che tutta la meccanica quantistica può essere intuita riflettendo attentamente su di esso, da lui definito come l'esperimento che ne contiene tutti i misteri [24]. Tra tutti i fisici che si sono concentrati sull'esperimento dell'interferenza con elettroni singoli, citiamo infine John S. Bell, che nel suo scritto *Sei possibili mondi della meccanica quantistica* appartenente alla raccolta *Dicibile e Indicibile in Meccanica Quantistica* [25], analizza lo "strano" comportamento degli elettroni introducendo, in questo contesto, le idee di base della meccanica quantistica.

Prima di procedere con la descrizione dell'esperimento con gli elettroni vogliamo esaminare cosa accade quando, invece delle particelle subatomiche, si utilizzano:

1. particelle materiali;
2. onde sull'acqua;
3. onde elettromagnetiche (luce).

Questo tipo di approccio si rifà a quello seguito da Feynman di cui si può trovare una versione molto interessante e istruttiva nel libro di Robert Gilmore, *Alice nel paese dei quanti* [26]. Si tratta, piuttosto che un confronto tra esperienze reali, di una procedura in un certo senso immaginaria, dal momento che l'apparato sperimentale è chiaramente molto diverso nei diversi casi, eppure verrà rappresentato sempre con lo stesso schema.

2.2.1.1 Interferenza con particelle materiali

Immaginiamo di avere un lanciatore automatico che spara palline da tennis in tutte le direzioni contro un muro dove sono praticate due fenditure e che al di là delle fenditure si trovi una parete sulla quale le palline possono lasciare un segno. Dopo un certo tempo si verifica la situazione mostrata in figura 2.2.1: la maggior parte dei segni è concentrata lungo due strisce in corrispondenza delle fenditure. Tali strisce sono dovute alle palline che hanno continuato indisturbate il loro moto fino alla parete, mentre i segni sparpagliati vengono lasciati da quelle palline che, urtando contro i bordi delle fenditure, deviano la loro traiettoria in maniera completamente casuale. La figura disegnata dalle palline sulla parete è esattamente la somma delle due figure che si avrebbero se a turno chiudessimo una delle fenditure: in linguaggio tecnico si dice che non c'è interferenza.

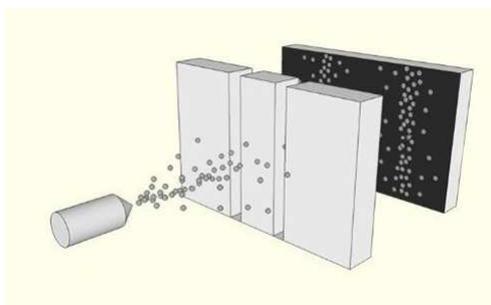


Figura 2.2.1: Interferenza con particelle materiali.

2.2.1.2 Interferenza sull'acqua

Supponiamo che l'apparato sperimentale sia immerso in una vaschetta d'acqua e che prima delle fenditure ci sia un eccitatore meccanico che, vibrando su e giù sulla superficie dell'acqua, generi onde circolari. Le due fenditure, avendo una larghezza paragonabile alla distanza tra due creste d'onda (lunghezza d'onda), agiscono a loro volta come sorgenti di onde circolari che si propagano verso la parete posteriore. Poiché i fronti d'onda investono contemporaneamente le due fenditure, le onde così generate sono chiaramente onde coerenti. Se la parete diventa più scura quando è bagnata rispetto a quando è asciutta, quello che si vedrà è la situazione illustrata in figura 2.2.2. La figura risultante è molto diversa dalla somma delle figure che si formano quando ciascuna delle due fenditure è aperta singolarmente: si verifica il fenomeno dell'interferenza. In particolare, quando si incontrano due creste (o due valli) si ha interferenza costruttiva: in queste zone l'acqua oscilla continuamente su e giù disegnando sulla parete la curva mostrate in figura. Quando, invece, si incontrano una valle e una cresta si ha interferenza distruttiva: si tratta di zone in cui l'acqua rimane imperturbata e sulla parete corrispondono ai punti, sulla linea tratteggiata, che separano le zone di liquido in movimento (punti nodali).

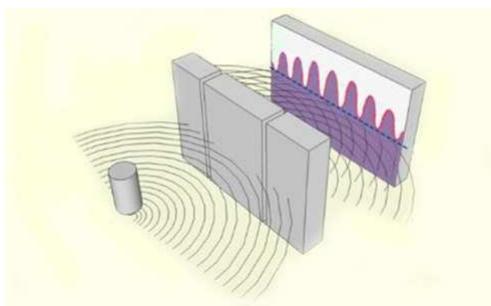


Figura 2.2.2: Interferenza con onde sull'acqua.

2.2.1.3 Interferenza con la luce

Quello con la luce è l'esperimento classico delle due fenditure, effettuato per la prima volta da Thomas Young nel 1803. L'esperimento di Young riveste un ruolo di spicco nella storia della fisica, dal momento che riuscì a fornire la prova sperimentale della natura ondulatoria della luce. E in effetti, illuminando con luce monocromatica le due fenditure, di larghezza paragonabile alla lunghezza d'onda della luce, quello che si vede è una figura d'interferenza formata da frange luminose a distanza uguale tra loro e inframmezzate da zone scure (figura 2.2.3) del tutto analoga alla figura a "bande" viste nel caso delle onde sull'acqua. Anche in questo caso, ciò che si osserva è completamente differente dalla somma dei due casi relativi alle fenditure aperte separatamente.

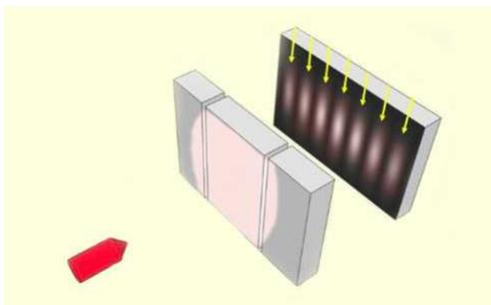


Figura 2.2.3: Interferenza con la luce.

2.2.1.4 Interferenza con elettroni

In questo caso bisogna pensare a un emettitore di elettroni (un catodo riscaldato nell'esperimento reale) che spara le particelle verso le due fenditure, al di là della quali si trova uno schermo rivelatore. Quando un elettrone attraversa le fenditure si ha una scintillazione sullo schermo.

Fin qui sembrerebbe che la situazione sia simile a quella delle palline da tennis, se non fosse che, nel momento in cui si mandano molti elettroni, i punti luminosi si distribuiscono su un pattern di frange analogo a quello visto con le onde, come si può vedere dalla figura 2.2.4. Si potrebbe concludere che il fenomeno sia dovuto ad un'interferenza tra gli elettroni che si scontrano l'uno con l'altro. E allora facciamo in modo di inviare un singolo elettrone solo dopo la scintillazione di quello precedente. Ebbene, aspettando un tempo ragionevolmente lungo, ancora una volta, sullo schermo rivelatore, si formano le frange d'interferenza. L'esperimento mostra quindi un carattere ondulatorio. Dice Bell:

Quello che fa la meccanica quantistica è sviluppare in modo preciso e rigoroso gli aspetti matematici di questo moto ondulatorio che governa in qualche modo l'elettrone. Non a caso, tra le diverse formulazioni della meccanica quantistica la più semplice e naturale prende il nome di "meccanica ondulatoria". Ma che cos'è che "ondeggia" nella meccanica ondulatoria? Nel caso di onde nell'acqua a oscillare è la superficie dell'acqua. In quello delle onde sonore è la pressione dell'aria. Nella fisica classica anche la luce era considerata un moto ondulatorio. Su cosa oscillasse in questo caso, c'era già una certa vaghezza, e persino sul fatto che la domanda avesse senso. Nel caso della meccanica ondulatoria non abbiamo idea di ciò che oscilla... e non ci poniamo la domanda.

Ciò che immediatamente emerge da quest'esperimento è la natura intrinsecamente probabilistica della meccanica quantistica: ad una stessa preparazione iniziale corrispondono diversi esiti sperimentali. Gli impatti degli elettroni, infatti, non avvengono sempre nello stesso punto, ma si

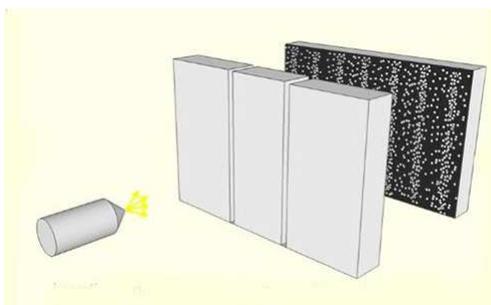


Figura 2.2.4: Interferenza con elettroni.

distribuiscono su tutta una regione dello schermo. Allo stesso tempo le statistiche di impatto in esperimenti ripetuti ricordano la propagazione delle onde.

Attraverso queste osservazioni, si riesce, con la massima naturalezza, a trasmettere il carattere ontologico della probabilità nei fenomeni quantistici e a convincere gli studenti della necessità di trovare l'equazione dell'onda "giusta" che contiene tutte le informazioni sulle statistiche di ogni misura. Una volta stabilito che la descrizione della dinamica di un oggetto quantistico non può essere altro che una descrizione di tipo probabilistico, bisogna cercare quest'onda che restituisce la statistica degli impatti. Si definisce così un vettore di stato, "un'onda di possibilità", che non è altro che un vettore ausiliario e che non è relativo ad una grandezza osservabile, ma ha il solo significato di portatore di informazione: si definisce la *funzione d'onda*, la cui evoluzione è regolata dall'equazione di Schrödinger. La conoscenza della funzione d'onda consente di prevedere la statistica dei possibili risultati in una serie di misure ma non il risultato di una singola misura.

Gli studenti, non avendo ancora trattato la risoluzione delle equazioni differenziali, affronteranno lo studio dell'equazione di Schrödinger discretizzando lo spazio e il tempo e trattando la funzione d'onda come un vettore a due componenti, che ne rappresentano la parte reale e la parte immaginaria. La procedura sarà descritta dettagliatamente nel seguito.

L'esperimento realizzato all'Università di Bologna viene presentato ai ragazzi attraverso il film didattico "Interferenza di elettroni"⁵, realizzato dal Reparto di Cinematografia Scientifica del CNR. Dopo una breve introduzione sull'interferenza, il filmato racconta l'apparato sperimentale impiegato e i risultati ottenuti. In figura 2.2.5 è mostrata la dinamica di formazione della figura di interferenza nell'esperimento reale.

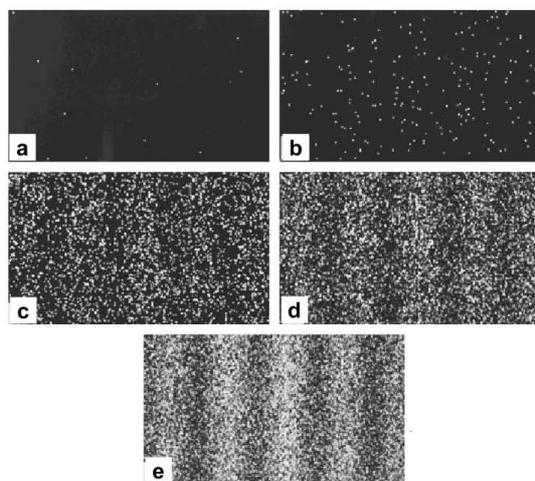


Figura 2.2.5: Esperimento della doppia fenditura con elettroni singoli. Le figure corrispondono all'invio di 10 (a), 200 (b), 6000 (c), 40000 (d), 140000 (e) elettroni.

2.2.2 Probabilità

Nella sezione precedente siamo arrivati alla conclusione che, quantisticamente, l'unica speranza che si può avere è riuscire a risalire alla statistica degli eventi, poiché, a parità di condizioni iniziali, ci troviamo davanti ad esiti diversi. Ma questa non è una circostanza inedita nello studio della fisica, basti pensare ai sistemi stocastici.

In questo paragrafo ci occuperemo delle equazioni d'evoluzione della probabilità in meccanica stocastica prima e in meccanica quantistica poi. Prima però, introduciamo lo studio di

⁵ Il video è disponibile in rete all'indirizzo: <https://www.youtube.com/watch?v=FXcqUkpvQd8&t=3s>

alcuni sistemi classici con l'ausilio del foglio elettronico così da sottolineare l'importanza delle condizioni iniziali. In seguito si evidenzia come entri in gioco la probabilità in meccanica classica per fare poi il confronto con situazioni più complesse.

2.2.2.1 Meccanica classica

Per trovare soluzioni alle equazioni del moto Newton si trovò di fronte al problema di ricostruire, partendo dalla sua posizione iniziale e dalla sua velocità iniziale, le posizioni e le velocità successive di un corpo come risultato di un continuo infinito di variazioni di velocità del corpo stesso. La procedura da lui concepita è nota come *Diagramma di Newton* e può essere riassunta nei seguenti due passi [27]:

1. la variazione della quantità di moto del corpo materiale durante un "breve intervallo di tempo Δt " è proporzionale all'impulso della forza applicata al corpo durante lo stesso intervallo. Δt dovrebbe essere scelto abbastanza piccolo da garantire che la forza non cambi molto durante l'intervallo di tempo in modo tale che l'impulso possa essere ben approssimato dalla forza all'inizio dell'intervallo di tempo Δt .
2. La traiettoria è ottenuta come limite geometrico della linea spezzata ottenuta considerando che il moto sia lineare uniforme durante ogni intervallo.

Essenzialmente, questa procedura consiste nel risolvere la seguente coppia di equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t)\Delta t \\ \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t)/m\Delta t \end{cases} \quad (2.2.1)$$

dove $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t)$ è la forza, nota a priori, che agisce sul corpo puntiforme all'istante t (quando è nella posizione $\mathbf{x}(t)$). La prima equazione delle (2.2.1) è la definizione di velocità, la seconda è la seconda legge della dinamica.

Implementando le equazioni di ricorrenza (2.2.1) in un foglio di calcolo, è possibile trovare numericamente il moto del punto materiale in funzione del tempo. Più precisamente, note posizione e velocità iniziali, le (2.2.1) restituiscono la posizione e la velocità in ogni istante successivo. Ogni passo consiste nella copia della riga precedente, in cui le formule di ricorrenza vengono scritte tramite riferimenti relativi (a parte i parametri fissi che appaiono come riferimenti assoluti). Questo metodo può essere applicato a diversi sistemi classici che sono considerati troppo complicati per essere presentati in un programma di fisica liceale, uno di questi è il problema dei tre corpi. In particolare, possiamo discutere la versione del modello analizzata da Eulero e nota come "problema dei tre corpi semplificato", che descrive tre corpi puntiformi che interagiscono attraverso forze gravitazionali. Di questi tre corpi uno ha massa trascurabile rispetto agli altri due e i due corpi "pesanti" seguono orbite circolari attorno al loro centro di massa. L'evoluzione del sistema viene quindi studiata numericamente grazie alle seguenti assunzioni:

- il corpo più pesante (il sole) ha una massa M_S così grande da essere soggetta ad un'accelerazione trascurabile. La sua posizione fissa viene presa come origine del sistema di coordinate cartesiane all'interno del quale si descrive il moto dei due pianeti;
- un pianeta di grande massa M_e segue un'orbita circolare intorno al sole. La sua posizione al tempo t è data da $\mathbf{x}_e(t) = (x_e(t), y_e(t))$;
- un secondo pianeta, di massa m trascurabile rispetto al primo, ha una velocità iniziale nel piano che contiene il sole e i due pianeti, cosicché il suo moto si svilupperà sempre su quel piano; la distanza iniziale del pianeta "leggero" sarà presa più piccola del raggio

dell'orbita di quello pesante e per questo motivo il secondo pianeta verrà indicato come il pianeta interno (e il primo come il pianeta esterno); le sue coordinate saranno denotate da $\mathbf{x}(t) = (x(t); y(t))$.

Sotto questi presupposti è possibile usare la (2.2.1) per esaminare il moto del pianeta leggero soggetto all'azione gravitazionale del Sole e del pianeta più esterno per varie condizioni iniziali e rapporti di massa.

Nell'esempio seguente si considera che le componenti della distanza del pianeta esterno siano:

$$x_e(t) = R_e \cos \omega_e t; \quad y_e(t) = R_e \sin \omega_e t$$

La (2.2.1) diventa:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t)\Delta t \\ \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) = (\mathbf{F}_{M_S m}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{F}_{M_e m}(\mathbf{x}(t), t))/m\Delta t \end{cases} \quad (2.2.2)$$

dove le componenti x delle forze sul pianeta interno dovute rispettivamente al Sole e al pianeta esterno sono:

$$\mathbf{F}_{M_S m}(\mathbf{x}(t)) = \frac{GM_S m}{[(x^2(t) + y^2(t))]^{\frac{3}{2}}} \mathbf{x}(t) \quad (2.2.3)$$

$$\mathbf{F}_{M_e m}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{GM_e m}{[(x_e(t) - x(t))^2 + (y_e(t) - y(t))^2]^{\frac{3}{2}}} (\mathbf{x}_e(t) - \mathbf{x}(t)).$$

Le componenti y possono essere facilmente ottenute sostituendo x con y .

Implementando queste equazioni nel foglio di calcolo, è possibile esaminare il moto del pianeta interno per vari valori dei parametri dinamici (i rapporti M_e/M_S e m/M_S) e per diverse condizioni iniziali. In particolare, gli studenti dovrebbero essere in grado di analizzare l'insorgere di un comportamento caotico del sistema e la forte dipendenza dalle condizioni iniziali nel regime caotico. Si noti che una discretizzazione dello spazio è implicita nella scelta del numero massimo di cifre decimali consentito nel foglio di calcolo.

Vediamo adesso come un discorso probabilistico può essere fatto classicamente, considerando sistemi semplici [28].

Classicamente, studiando il moto di un punto materiale, si può affermare che esso possiede una posizione e una velocità misurabili, in linea di principio, ad ogni livello di accuratezza; inoltre l'evoluzione della velocità e della posizione è di tipo strettamente deterministico, per cui, ad ogni condizione iniziale corrisponde, ad un istante successivo, un'unica coppia posizione-velocità.

Consideriamo una particella puntiforme e di massa unitaria che sia in moto su un reticolo unidimensionale costituito da $2N + 1$ punti, con N sufficientemente grande da poter trascurare gli effetti di bordo. Siano x e v la posizione e la velocità, tali che $x \in \{-N, \dots, N\}$ e $v \in \mathbb{Z}$. Assumiamo, inoltre, che non solo lo spazio sia discreto (il reticolo), ma che lo sia anche il tempo, scegliendo, in particolare, un passo temporale unitario. Il moto della particella può essere descritto riscrivendo le equazioni (2.2.1):

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = \alpha v(n) \\ v(n+1) - v(n) = \alpha F(x(n)) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

dove $F(x(n))$ è la forza per unità di massa nel punto del reticolo occupato dalla particella all'istante n e α è il passo temporale.

Note le condizioni iniziali $(x(0), v(0))$, l'evoluzione di un sistema classico è univocamente determinata dalla relazione

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (n+1) = R_n \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (n) = \prod_{k=0}^n R_k \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (k), \quad (2.2.5)$$

con R_n matrice 2×2 invertibile. Dalla (2.2.4) si ricava

$$R_n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha F(x(n)) & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Attraverso questo modello di discretizzazione spazio-temporale possiamo analizzare due possibili moti semplici della particella sul reticolo:

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = v(n) \\ v(n+1) - v(n) = 0 \end{cases} \quad \text{moto uniforme} \quad (2.2.7)$$

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = v(n) \\ v(n+1) - v(n) = -kx(n) \end{cases} \quad \text{moto armonico} \quad (2.2.8)$$

Le equazioni sono state scritte avendo posto $\alpha = 1$. Vogliamo capire cosa accade se non si conoscono con esattezza le condizioni iniziali. Ipotizziamo, allora, che la particella abbia una certa probabilità $P_0(i, j)$ di trovarsi nel punto $x(0) = i$ con velocità $v(0) = j$. A partire dalle equazioni dinamiche si giunge ad un'equazione di evoluzione della probabilità:

$$P_{n+1}(i, j) = P_n(R_n^{-1}(i, j)), \quad (2.2.9)$$

che stabilisce che la probabilità di trovare la particella nel punto (i, j) è uguale alla probabilità che, all'istante precedente, la particella fosse nell'unico punto che evolve in (i, j) in un unico passo.

Per il moto uniforme e per il moto armonico si ottiene:

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = v(n) \\ v(n+1) - v(n) = 0 \end{cases} \Rightarrow P_{n+1}(i, j) = P_n(i - j, j) \quad (2.2.10)$$

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = v(n) \\ v(n+1) - v(n) = -kx(n) \end{cases} \Rightarrow P_{n+1}(i, j) = P_n\left(\frac{i-j}{2}, \frac{i+j}{2}\right) \quad (2.2.11)$$

dove abbiamo posto $k = 1$. $P_{n+1}(i, j)$ sarà uguale a zero se $i - j$ oppure $i + j$ sono numeri dispari.

Ricordiamo che gli stati di un sistema dinamico sono, ad ogni tempo (discreto) n , *eventi elementari* del tipo:

$$\omega(i, j) \equiv \begin{array}{l} \text{(al tempo } n) \text{ la particella si trova} \\ \text{nel punto } i \text{ con velocità } j \end{array}$$

e gli *eventi* sono:

$$A = \bigcup_k \omega(i_k, j_k) \equiv \begin{array}{l} \text{(al tempo } n) \text{ la particella ha posizione e} \\ \text{velocità nell'insieme delle coppie } \{i_k, j_k\} \end{array}$$

Ad ogni evento attribuiamo una probabilità $P_n(i, j)$ tale che

$$P_n(i, j) \geq 0 \quad , \quad \sum_{i,j} P_n(i, j) = 1$$

e

$$P_n(A) = \sum_{\{i_k, j_k\} \in A} P_n(i_k, j_k).$$

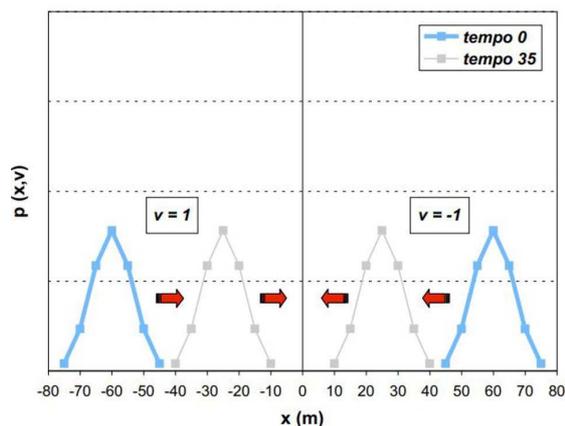


Figura 2.2.6: Evoluzione della probabilità per un moto uniforme.

Se consideriamo il caso del moto uniforme con la seguente condizione iniziale:

$$P_0(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } i = -60 \text{ e } j = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{per } i = 60 \text{ e } j = -1 \\ 0 & \text{per ogni altra coppia } (i, j) \end{cases} \quad (2.2.12)$$

possiamo domandarci quale sia la probabilità di trovare la particella nell'origine con una velocità qualunque ad un istante successivo a quello iniziale. Si noti che la condizione (2.2.12) equivale a dire che la particella si trova a sinistra dell'origine nel punto -60 e ha velocità 1 (verso destra) oppure a destra dell'origine nel punto 60 con velocità -1 (verso sinistra). Allora, la probabilità desiderata è uguale alla probabilità che la particella arrivi nell'origine da sinistra moltiplicata per la probabilità che si trovi inizialmente a sinistra più la probabilità che arrivi nell'origine da destra moltiplicata per la probabilità che si trovi a destra. L'utilizzo del foglio di calcolo permette di calcolare e graficare il profilo della probabilità (figura 2.2.6 e 2.2.7). La distribuzione di probabilità varia nel tempo secondo regole che dipendono dalla dinamica.

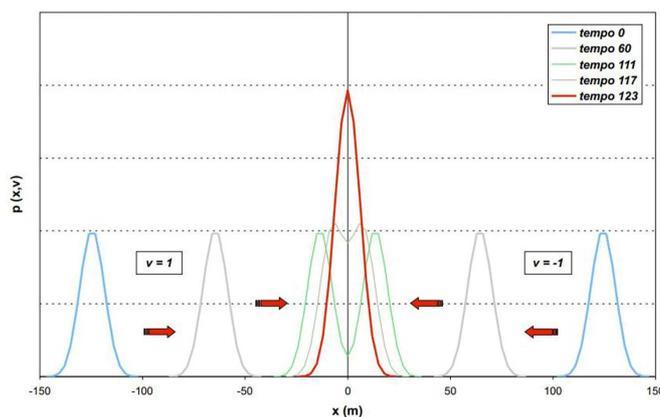


Figura 2.2.7: Somma delle probabilità.

2.2.2.2 Meccanica stocastica

Per meccanica stocastica si intende un modello per lo studio di sistemi che evolvono nel tempo secondo leggi probabilistiche. Esempio paradigmatico è il moto browniano, cioè il moto scoper-

to nel 1828 dal naturalista Robert Brown, che osservò al microscopio che grani di polline posti in sospensione in acqua presentavano un moto rapido e caotico. Questo moto viene mostrato ai ragazzi grazie all'applet indicata in tabella ??.

Il primo a spiegare quantitativamente il fenomeno fu Albert Einstein nel 1905, dimostrando che il moto irregolare era dovuto ai continui urti dei granelli di polline con le molecole d'acqua. Gli urti avvengono in maniera isotropa ed il loro effetto medio è nullo. Ci sono però delle fluttuazioni che fanno in modo da produrre una forza tale da spingere il granello da una parte piuttosto che dall'altra, da cui il moto osservato sperimentalmente.

Il lavoro dovuto ad Einstein e in seguito a Paul Langevin, ha condotto, con un numero limitato di ipotesi sull'effetto e sulla frequenza e direzione degli urti, ad equazioni che rendono perfettamente conto della statistica osservata.

La probabilità entra nella teoria per tener conto di due principali limitazioni:

- l'impossibilità di caratterizzare ad ogni livello di accuratezza lo stato meccanico dell'ambiente circostante le particelle browniane, che è assunto essere costituito da un enorme numero di particelle;
- l'impossibilità di specificare esattamente l'effetto complessivo sulla particella browniana di una sequenza quasi continua di urti.

Nel suo articolo "Investigations on the Theory of the brownian movement" [29], Einstein fa le seguenti assunzioni:

- sulle singole particelle agisce una forza che dipende dalla posizione ma non dal tempo;
- ogni singola particella ha un moto indipendente da tutte le altre particelle;
- i moti di una stessa particella in intervalli di tempo diversi sono processi mutuamente indipendenti.

In un reticolo unidimensionale, ciò equivale a dire che il moto di una particella browniana si presenta in sequenze casuali simili a quelle della passeggiata aleatoria (*random walk*): ad ogni passo temporale la particella salta su uno dei due siti vicini con uguale probabilità $1/2$. La probabilità di posizione al tempo $n + 1$ dipende, quindi, solo dalla probabilità di posizione nell'istante precedente n . In particolare, la probabilità che la particella si trovi nel punto i del reticolo, all'istante $n + 1$, è la somma delle probabilità dei due eventi indipendenti: o la particella è nel sito $i - 1$ al tempo n e salta a destra oppure nel sito $i + 1$ e salta a sinistra. L'equazione di evoluzione è:

$$P_i(n + 1) = \frac{1}{2}P_{i-1}(n) + \frac{1}{2}P_{i+1}(n) \quad (2.2.13)$$

che scritta in una forma più simile all'equazione di diffusione diventa:

$$P_i(n + 1) - P_i(n) = \frac{1}{2}[P_{i-1}(n) + P_{i+1}(n) - 2P_i(n)] \quad (2.2.14)$$

L'equazione di ricorrenza (2.2.14) è facilmente implementabile in un foglio di calcolo e, data una distribuzione di probabilità di posizione iniziale, la soluzione restituisce la probabilità di posizione della particella browniana in qualsiasi istante n .

Particolarmente importante per il confronto con l'evoluzione della probabilità di posizione di una particella quantistica libera è il caso in cui la distribuzione iniziale consiste di due distinte "gobbe". Nel caso delle particelle browniane le due gobbe evolvono indipendentemente e la probabilità di essere in un punto qualunque in ogni istante successivo è data dalla somma delle due evoluzioni indipendenti (figura 2.2.8).

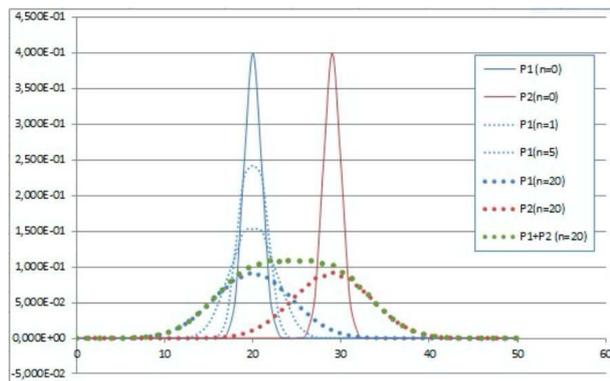


Figura 2.2.8: Probabilità di posizione di una particella browniana.

2.2.2.3 Meccanica quantistica

Abbiamo visto come la natura probabilistica dei fenomeni quantistici possa venir messa in evidenza attraverso l'esperimento della doppia fenditura. L'esperimento permette, inoltre, di distinguere tra stato sovrapposizione e miscela. Supponiamo che lo stato del sistema al tempo $t = 0$ sia la sovrapposizione di un pacchetto d'onda φ_1 concentrato nella regione della fenditura 1 e di un pacchetto d'onda φ_2 concentrato nella regione della fenditura 2. Se l'elettrone è stato prodotto da una sorgente equidistante dalle fenditure, i due pacchetti d'onda saranno identici in modulo e fase (a meno di una traslazione). Una misura di posizione a quell'istante darebbe, con probabilità $1/2$, l'elettrone vicino alla fenditura 1 e con la stessa probabilità l'elettrone vicino alla fenditura 2. Infatti $|\varphi_1 + \varphi_2|^2 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2$ a quell'istante, essendo il prodotto $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = 0$ ovunque (i supporti delle due parti dello stato sono disgiunti). Ad un tempo successivo t , gli evoluti di φ_1 e di φ_2 (onde sferiche con sorgente nella fenditura 1 e 2 rispettivamente) arriveranno nelle stesse regioni della lastra fotografica dove si sommeranno (come vettori bidimensionali) e potranno avere interferenza distruttiva, costruttiva o parziale. In tale istante, il modulo quadro sarà totalmente diverso dalla somma dei quadrati dei moduli. La situazione è illustrata in figura 2.2.9.

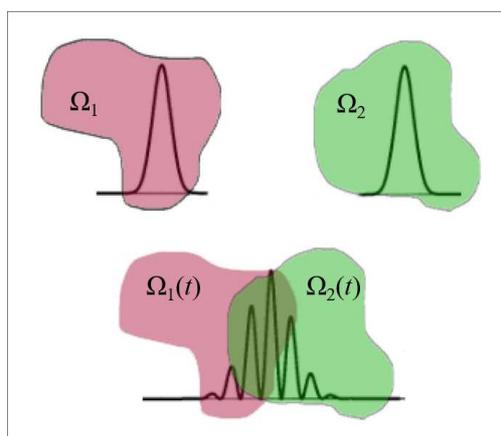


Figura 2.2.9: Nella parte alta della figura sono mostrati i due pacchetti distinti al tempo $t = 0$. I supporti dei due stati sono indicati con Ω_1 e Ω_2 e hanno inizialmente intersezione vuota. In basso, nell'evoluzione, i due pacchetti si incontrano e danno luogo ad interferenza.

Si pensi invece alla situazione in cui, per mancanza di informazione sullo stato iniziale, si sappia solamente che al tempo t lo stato sia φ_1 con probabilità $1/2$ e con probabilità $1/2$ sia invece φ_2 (si noti che una misura di posizione a tale istante darebbe la stessa risposta del caso precedente). Lo stato si dice in questo caso una miscela dei due stati e rappresenta uno stato fisico dell'elettrone totalmente diverso dal primo. Se infatti ci domandassimo quale sarà la probabilità di impatto dell'elettrone in una regione della lastra fotografica dovremmo, in questo caso, calcolare l'evoluzione (indipendente) di φ_1 e di φ_2 , calcolare la probabilità P_1 e P_2 che l'elettrone impatti in quella regione quando lo stato dell'elettrone è rispettivamente rappresentato da φ_1 o da φ_2 e poi calcolare $1/2P_1 + 1/2P_2$, secondo le regole della probabilità classica. Si noti che questo secondo stato si può ottenere sperimentalmente se, per ogni elettrone emesso, con probabilità $1/2$ si chiude una o l'altra delle due fenditure.

Il nostro obiettivo è quello di rendere accessibile il formalismo quantistico, proponendolo in una forma semplificata, per mostrare come si arrivi a risultati completamente differenti da quelli descritti nella sezione precedente.

Per descrivere la dinamica di una particella quantistica, introduciamo l'equazione di Schrödinger in uno spazio-tempo discretizzato, così da superare i problemi legati al calcolo differenziale, presentandola come un'equazione delle onde per un campo vettoriale bidimensionale (la parte reale e quella immaginaria della funzione d'onda) [30]. Si ricorre al concetto più familiare di vettore nel piano proprio per evitare l'utilizzo di variabili complesse, altro argomento non ancora padroneggiato dagli studenti delle scuole superiori.

Assumiamo che lo spazio sia un grande reticolo unidimensionale con $2N + 1$ siti e con un passo molto piccolo e supponiamo che la massa della particella e la costante universale \hbar siano uguali a 1.

Le assunzioni teoriche riguardanti lo spazio degli stati, le statistiche attese dei risultati delle misure e l'evoluzione temporale dello stato sono:

- lo stato di una particella in ogni istante n è specificato dall'associazione, in ogni punto j del reticolo, di un vettore a due componenti:

$$\Psi(n) \equiv \{\vec{\psi}_j\}_{j=-N}^N(n) \equiv \{\psi_{j,x}, \psi_{j,y}\}_{j=-N}^N(n) \equiv \{x_j(n), y_j(n)\}_{j=-N}^N. \quad (2.2.15)$$

Alle osservabili fisiche posizione e momento sono associati gli operatori X e P nello spazio degli stati

$$X\Psi(n) = \left\{ \overrightarrow{(Z\Psi)}_j \right\}_{j=-N}^N(n) = \{jx_j(n), jy_j(n)\}_{j=-N}^N \quad (2.2.16)$$

$$P\Psi(n) = \left\{ \overrightarrow{(P\Psi)}_j \right\}_{j=-N}^N(n) = \{\Delta_j y(n), -\Delta_j x(n)\}_{j=-N}^N, \quad (2.2.17)$$

dove $\Delta_j x = \frac{x_{j+1} - x_j}{a}$ e $\Delta_j y = \frac{y_{j+1} - y_j}{a}$, con a passo del reticolo. Quando lo stato al tempo n è $\Psi(n)$, alla posizione e al momento sono associati i seguenti numeri reali:

$$(\Psi(n), X\Psi(n)) \equiv \sum_{j=-N}^N (\psi_{j,x}(n)(X\Psi)_{j,x}(n) + \psi_{j,y}(n)(X\Psi)_{j,y}(n)) = \sum_{j=-N}^N j(x_j^2(n) + y_j^2(n)) \quad (2.2.18)$$

$$\begin{aligned} (\Psi(n), P\Psi(n)) &\equiv \sum_{j=-N}^N (\psi_{j,x}(n)(P\Psi)_{j,x}(n) + \psi_{j,y}(n)(P\Psi)_{j,y}(n)) \\ &= \sum_{j=-N}^N j(x_j(n)\Delta_j y(n) - y_j(n)\Delta_j x(n)). \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

- La probabilità di trovare la particella nel punto j del reticolo, al tempo n è

$$P_j(n) = |\vec{\psi}_j(n)|^2 = x_j^2(n) + y_j^2(n). \quad (2.2.20)$$

Poiché la particella deve necessariamente essere da qualche parte, deve essere vero che

$$\sum_{j=-N}^N (x_j^2(n) + y_j^2(n)) = 1. \quad (2.2.21)$$

In particolare, il valore medio della posizione è dato da

$$\langle x \rangle = (\Psi(n), X\Psi(n)) = \sum_{j=-N}^N j(x_j^2(n) + y_j^2(n)). \quad (2.2.22)$$

Il valore medio del momento $p = mv$ è dato da

$$\langle p \rangle = (\Psi(n), P\Psi(n)) = \sum_{j=-N}^N x_j(n)\Delta_j y(n) - y_j(n)\Delta_j x(n). \quad (2.2.23)$$

- Le componenti del vettore di stato evolvono nel tempo in accordo all'equazione di Schrödinger:

$$\begin{cases} x_j(n+1) - x_j(n) = [-y_{j+1}(n) - y_{j-1}(n) + 2y_j + V_j y_j(n)] \alpha \\ y_j(n+1) - y_j(n) = [+x_{j+1}(n) + x_{j-1}(n) - 2x_j + V_j x_j(n)] \alpha \end{cases} \quad (2.2.24)$$

dove α è il passo temporale e V_j il valore assunto nel punto j dal potenziale della forza conservativa che agisce sulla particella.

Sono necessarie alcune precisazioni:

1. l'equazione di Schrödinger è stata ottenuta da quella continua per discretizzazione del tempo e dello spazio. La discretizzazione temporale rende l'evoluzione definita dalla (2.2.24) non esattamente unitaria. In altre parole, la somma delle probabilità $|\psi_j(n)|^2$ non rimane esattamente 1, ma tende ad esplodere per tempi lunghi. La costante α va quindi scelta opportunamente per "ritardare" questo fenomeno che, in ogni caso, non pregiudica l'andamento qualitativo della soluzione.
2. Bisogna analizzare la relazione tra l'osservabile momento e il vettore differenza che appare nella (2.2.24)

$$d\vec{\psi}_j(n) \equiv (x_{j+1}(n) - x_j(n), y_{j+1}(n) - y_j(n)). \quad (2.2.25)$$

Se in qualche istante $\vec{\psi}(n)$ fosse diversa da zero ovunque, tranne che in un punto i , il vettore differenza sarebbe diverso da zero sia in j che in $j-1$. Quindi, se all'istante n la particella è con certezza nel punto j , non può avere con certezza un valore del momento.

3. Le equazioni di evoluzione della probabilità nel caso del moto browniano non differiscono molto dall'equazione di Schrödinger. La differenza sostanziale tra meccanica stocastica e meccanica quantistica sta nel fatto che quantisticamente ciò che evolve è il vettore ausiliario $\vec{\psi}$, dal quale si ricava la probabilità di posizione facendone il modulo quadro.

Le conseguenze della linearità dell'equazione di Schrödinger insieme al principio di sovrapposizione possono essere mostrati e chiariti in casi semplici. In particolare, in un reticolo unidimensionale, consideriamo una particella quantistica libera (nella (2.2.24) $V_j = 0 \forall j$) in uno stato iniziale Ψ che è una sovrapposizione normalizzata di due stati, $\Psi^{(1)}$ e $\Psi^{(2)}$ con lo stesso profilo, ma aventi supporti disgiunti rispettivamente a sinistra e a destra dell'origine. Sia $\Psi^{(1)}$ che $\Psi^{(2)}$

hanno un momento medio che tende verso l'origine, con uguale valore assoluto. Al tempo n si avrà

$$\Psi(n) = \Psi^{(1)}(n) + \Psi^{(2)}(n) = \left\{ x_j^{(1)}(n) + x_j^{(2)}(n), y_j^{(1)}(n) + y_j^{(2)}(n) \right\}_{j=-N}^N.$$

Solitamente ci saranno punti del reticolo dove entrambe le $\Psi^i(n)$ hanno componenti diverse da zero. In questi punti la probabilità di posizione ovviamente non sarà la somma della probabilità negli stati $\Psi^i(n)$, essendo in generale

$$(x_j^{(1)}(n) + x_j^{(2)}(n))^2 + (y_j^{(1)}(n) + y_j^{(2)}(n))^2 \neq [(x_j^{(1)}(n))^2 + (y_j^{(1)}(n))^2] + [(x_j^{(2)}(n))^2 + (y_j^{(2)}(n))^2].$$

In figura 2.2.10 sono mostrate le probabilità di posizione in ogni punto del reticolo per tre tempi successivi calcolate risolvendo l'equazione di ricorrenza (2.2.24).

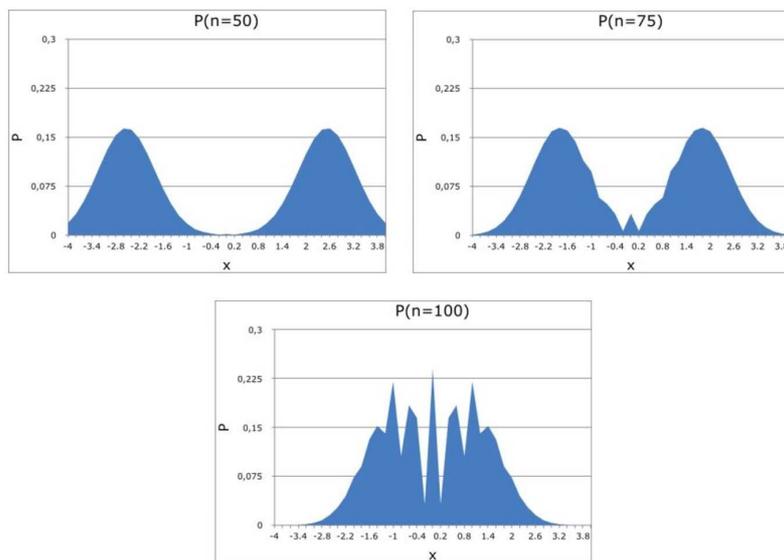


Figura 2.2.10: L'evoluzione della probabilità di posizione di una particella quantistica libera quando la distribuzione iniziale consiste di due distinte "gobbe" con momento medio opposto, rispettivamente a destra e a sinistra dell'origine. La probabilità di trovarsi nell'origine non è data dalla somma delle due evoluzioni indipendenti.

Il confronto tra l'evoluzione della probabilità di una particella quantistica e quella di una particella browniana rende evidente la differenza tra i due casi. Nel primo caso è impossibile caratterizzare la sovrapposizione iniziale con "o la particella si trova a destra o si sta muovendo verso sinistra oppure è a sinistra e si muove verso destra" e non vi è alcuna possibilità di definire qualsiasi tipo di probabilità condizionale.

Ci sono altri aspetti chiave dell'evoluzione quantistica che possono essere descritti usando la procedura di calcolo numerico sopra descritta. Ad esempio, studiando l'evoluzione di un pacchetto di onde libere si può verificare che l'equazione di Schrödinger è dispersiva e analizzare la connessione tra il fenomeno dispersivo e l'indeterminazione nel momento iniziale. La figura 2.2.11 mostra l'allargamento del pacchetto d'onda nel tempo. È anche possibile esaminare il caso di un oscillatore armonico quantistico includendo, nell'equazione (2.2.24), il potenziale elastico $V_j = -Kx_j^2$.

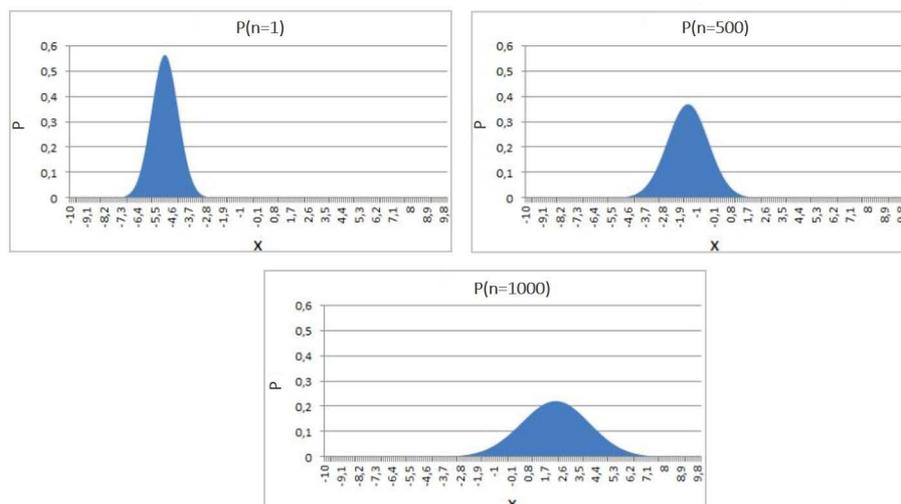


Figura 2.2.11: L'evoluzione della probabilità di posizione di una particella quantistica libera mostra l'allargamento del pacchetto d'onda.

2.2.3 Macchina di Wimshurst e onde elettromagnetiche

La macchina elettrostatica di Wimshurst fu ideata dall'ingegnere britannico James Wimshurst nel 1889. La macchina, come mostrato in figura 2.2.12, è costituita da due dischi di materiale isolante, coassiali e disposti verticalmente molto vicini tra loro.



Figura 2.2.12: Macchina di Wimshurst.

I dischi ruotano in senso contrario per azione manuale, grazie ad una manovella collegata ad un sistema di pulegge. Disposti in maniera radiale sulla superficie di ciascun disco si trovano dei settori metallici sui quali strisciano due spazzole poste alle estremità di un supporto diametrico. I supporti dei due dischi sono posizionati in maniera tale da formare una X. Due punte metalliche si affacciano su uno dei dischi agli estremi opposti di un diametro orizzontale e sono collegate all'armatura interna di due condensatori cilindrici (riproduzione della storica bottiglia di Leyda) fissati alla base. Ciascuna di queste armature è connessa con una delle sferette di uno spinterometro, la cui distanza è regolabile. Durante la rotazione contrapposta dei dischi, una carica, inizialmente presente su un settore, passando in corrispondenza del settore che sull'altro disco è in contatto con la spazzola, induce su questo una carica di segno opposto e una carica di ugual segno sul settore in contatto con l'altra spazzola sostenuta dal medesimo supporto. I due settori così caricati lasciano le spazzole e portano le rispettive cariche in prossimità delle punte, dove, per l'effetto punta, vengono trasferite alle armature interne dei due condensatori

che si caricano di segno opposto; con queste si caricano le sferette dello spinterometro e quando la differenza di potenziale è sufficientemente elevata (dell'ordine di 10 kV per ogni centimetro di distanza) scocca una scintilla in aria. L'esperienza dà la possibilità di parlare di induzione elettrostatica, del potere dispersivo delle punte, del fenomeno della rottura del dielettrico, ma soprattutto consente di mettere in evidenza come le cariche siano origine sia di campi elettrici che di campi magnetici. Se, infatti, utilizziamo un rivelatore di onde elettromagnetiche del tipo in figura 2.2.13, nel momento della scarica si rivela un campo magnetico e un campo elettrico a seconda dell'impostazione.



Figura 2.2.13: Rivelatore di onde elettromagnetiche.

In questo contesto si può poi insistere sul fatto che un campo elettrico generi sempre un campo magnetico e che questi oscillino in fase e in direzioni ortogonali tra loro ed ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda, come in figura 2.2.14. Le onde elettromagnetiche sono quindi onde trasversali.

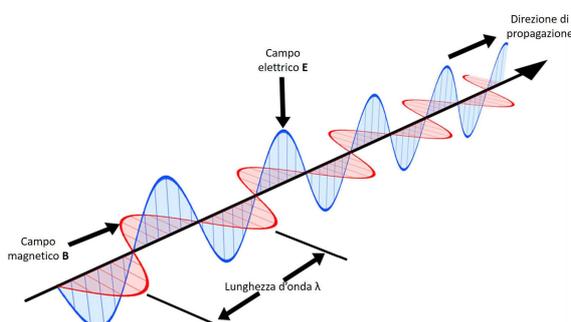


Figura 2.2.14: Trasversalità delle onde elettromagnetiche.

Una volta discussa l'induzione elettrostatica si passa ad analizzare quella elettromagnetica, che si verifica quando il flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata da un circuito elettrico è variabile nel tempo [31]. La discussione viene integrata con l'impiego di un applet di cui, in figura 2.2.15, è mostrato uno screenshot e che consente una verifica della legge di Faraday:

$$\Delta V = - \frac{\partial \Phi_{\Sigma}(\mathbf{B})}{\partial t}, \quad (2.2.26)$$

dove ΔV è la forza elettromotrice indotta da un campo magnetico \mathbf{B} in una linea chiusa $\partial\Sigma$ e $\Phi_{\Sigma}(\mathbf{B})$ è il flusso del campo attraverso la superficie Σ che ha quella linea come frontiera. Sull'argomento si possono effettuare diversi esperimenti utilizzando ad esempio una torcia a dinamo oppure motori.

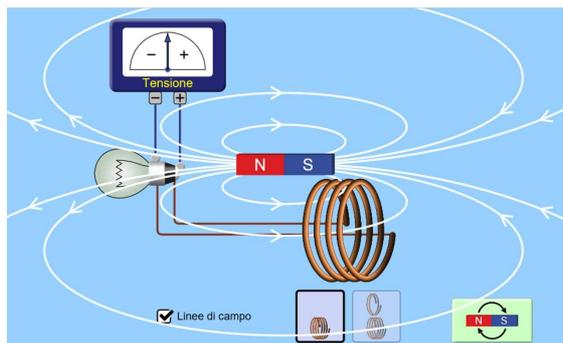


Figura 2.2.15: Screenshot di un'applet per lo studio della legge di Faraday, disponibile all'indirizzo https://phet.colorado.edu/sims/html/faradays-law/latest/faradays-law_it.html.

Scrivendo ΔV come il lavoro svolto dal campo elettrico per unità di carica e considerando un circuito stazionario, la (2.2.26) si scrive nella seguente forma integrale:

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial\Phi_{\Sigma}(\mathbf{B})}{\partial t}, \quad (2.2.27)$$

che non è altro che la III equazione di Maxwell in forma integrale. Ora, se scrive anche la legge di Ampere in assenza di sorgenti, cioè la IV equazione di Maxwell in forma integrale,

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E})}{\partial t}, \quad (2.2.28)$$

risulta chiaro quello che è stato precedentemente affermato: un campo magnetico variabile genera un campo elettrico e viceversa. Se si richiamano anche la I e la II legge di Maxwell, cioè il teorema di Gauss per il campo elettrico e per il campo magnetico, si può fare riferimento al fatto che da queste quattro leggi, di fondamentale importanza per lo sviluppo dell'elettromagnetismo, si giunge all'equazione delle onde. Chiaramente questo discorso non può essere fatto con la precisione che meriterebbe, ma è importante sottolineare questo legame.

A questo punto si passa alla classificazione delle onde elettromagnetiche in funzione della frequenza, discutendo quindi lo spettro elettromagnetico e ricordando poi la fondamentale relazione, $c = \lambda\nu$, che lega frequenza e lunghezza d'onda.

2.2.4 Banco "ottico" con le microonde

Il sistema, mostrato in figura 2.2.16, è costituito da un trasmettitore di onde elettromagnetiche polarizzate linearmente e con lunghezza d'onda $\lambda = 2,85$ cm (microonde) e da un ricevitore.



Figura 2.2.16: Banco ottico con le microonde.

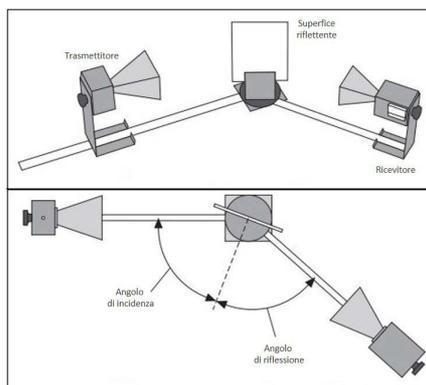


Figura 2.2.17: Setup per la verifica della legge della riflessione con le microonde.

Entrambi terminano con due antenne a tromba identiche, posizionate su due rotaie che convergono in un punto attorno a cui possono ruotare. Il ricevitore fornisce in uscita un segnale di tensione, misurato grazie ad un voltmetro, proporzionale alla potenza del segnale che lo ha investito, e può inoltre ruotare, come pure il trasmettitore, di 360° intorno ad un asse orizzontale.

Dal momento che la lunghezza d'onda delle microonde è confrontabile con le dimensioni degli oggetti circostanti, il sistema permette di studiare fenomeni di interferenza e diffrazione in maniera molto più semplice che con radiazione visibile.

La prima legge che viene verificata è quella della riflessione da una superficie conduttiva. Si sistema l'apparato come in figura 2.2.17 e si varia l'angolo tra l'asse del ricevitore e la normale alla superficie riflettente. Il massimo del segnale si avrà quando tale angolo è uguale a quello tra l'asse del trasmettitore e la suddetta normale, in altre e più comuni parole, quando l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

Un'altra esperienza si basa sull'interazione della radiazione con la materia. Utilizzando ostacoli di materiali diversi (polistirolo, legno, cartone, metallo) si osserva la variazione dell'intensità del segnale ricevuto. Questa parte può essere integrata con un'applet online che permette di fare osservazioni su come molecole diverse reagiscono a diverse sorgenti di radiazione elettromagnetica.

Se tra le due antenne si montano su un supporto dei pannelli in modo da realizzare due fenditure, come in figura 2.2.18, si realizza un esperimento di interferenza.

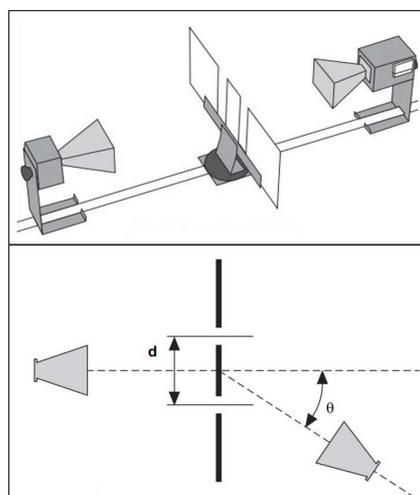


Figura 2.2.18: Setup per l'esperimento della doppia fenditura con le microonde.

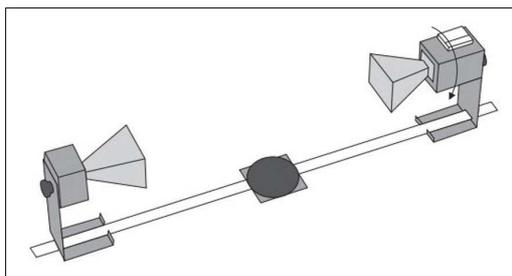


Figura 2.2.19: Setup per la verifica della legge di Malus con le microonde.

L'onda si diffrange in due onde che si sovrappongono nello spazio oltre le aperture, le cui dimensioni sono confrontabili con la lunghezza d'onda. Ci saranno punti nello spazio in cui si formano dei massimi d'intensità e altri in cui si formano dei minimi. L'intensità dell'onda varia in base all'angolo di rivelazione θ . Se la distanza tra le due aperture è d , variando θ , si verifica che i massimi di intensità si hanno quando

$$d \sin \theta = n\lambda, \quad (2.2.29)$$

con n numero intero. I minimi si hanno per

$$d \sin \theta = n \frac{\lambda}{2}. \quad (2.2.30)$$

Un'ultima esperienza da proporre agli studenti riguarda la polarizzazione della radiazione. Dapprima si dispone il sistema come in figura 2.2.19 e successivamente si fa ruotare il ricevitore di un angolo α . Le microonde emesse dal trasmettitore sono polarizzate linearmente nel piano verticale e il ricevitore è sensibile solo alla componente del campo elettrico parallela al suo asse. Quindi, se inizialmente si ha un segnale massimo, ruotando il ricevitore l'intensità diminuisce fino a diventare nulla per $\alpha = 90^\circ$. L'esperienza permette una verifica della legge di Malus:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha. \quad (2.2.31)$$

A questo punto si riposizionano le due antenne nella configurazione iniziale, in maniera che siano parallele e si colloca tra le due un supporto con una matrice di fili metallici paralleli, come illustrato in figura 2.2.20. La radiazione passa soltanto quando la griglia è disposta in maniera tale che i fili siano perpendicolari alla direzione di polarizzazione, cioè quando il campo elettrico oscilla ortogonalmente alla direzione dei fili. Se, invece, si sistema la griglia parallelamente alla direzione di polarizzazione, in risposta al capo elettrico oscillante, si genera lungo i fili un moto degli elettroni, una corrente, che a sua volta genera un'onda elettromagnetica riflessa e come

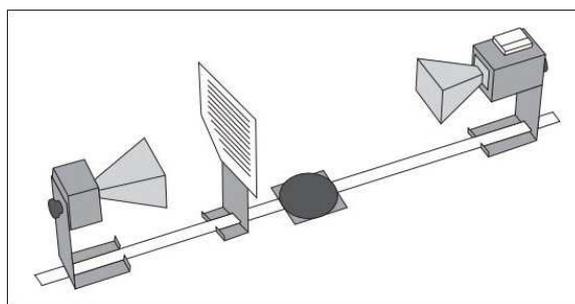


Figura 2.2.20: Setup per lo studio della polarizzazione con griglia a fili metallici.

risultato non si ha trasmissione. Per la radiazione riflessa bisogna poi tener conto delle perdite per effetto Joule, causate, cioè, dal surriscaldamento dovuto alla corrente nei fili. Nel primo caso la radiazione polarizzata con campo elettrico ortogonale ai fili non può generare corrente lungo di essi e quindi viene trasmessa praticamente imperturbata.

2.2.5 Misura del rapporto e/m

L'esperimento qui trattato [32] è stato ideato ispirandosi all'esperimento storico di J. J. Thomson che, utilizzando un tubo a raggi catodici, misurò il rapporto e/m , cioè la carica specifica dell'elettrone.

L'apparato sperimentale, mostrato in figura 2.2.21, è costituito da un'ampolla di vetro contenente un gas (H_2) rarefatto e nella quale è inserito un cannone elettronico.



Figura 2.2.21: Strumentazione per la misura della carica specifica dell'elettrone.

Quest'ultimo non è altro che un filamento (f in figura 2.2.22) di tungsteno che, riscaldandosi, emette elettroni per effetto termoionico. Gli elettroni vengono attirati dall'anodo A ed accelerati dalla differenza di potenziale tra f e A .

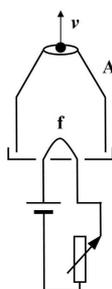


Figura 2.2.22: Schema del circuito che permette la fuoriuscita degli elettroni emessi dal filamento f per effetto termoionico.

L'anodo, a forma di imbuto, permette la fuoriuscita degli elettroni secondo la direzione del suo asse. L'energia degli elettroni è sufficiente da eccitare per urto gli atomi di idrogeno presenti nell'ampolla. Gli atomi decadono poi rapidamente allo stato fondamentale emettendo fotoni, inducendo quindi una debole luminosità che permette, in una situazione di buio, di individuare il percorso degli elettroni. L'ampolla è posta tra due bobine, dette di Helmholtz, disposte in maniera coassiale ed a distanza pari al loro raggio. Facendo passare una corrente nelle bobine si genera un campo magnetico altamente uniforme e diretto lungo il loro asse. In figura 2.2.21 si possono notare infine un voltmetro ed un amperometro, per misurare differenze di potenziale ed intensità di corrente.

Gli elettroni, all'uscita dell'anodo con velocità v , possiedono un'energia pari a

$$eV = \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.2.32)$$

con e e m rispettivamente carica e massa dell'elettrone e V differenza di potenziale che accelera gli elettroni verso l'anodo. Essi, se il sistema è opportunamente regolato, escono dall'anodo in direzione verticale e si trovano immersi nel campo magnetico dovuto alle bobine di Helmholtz, la cui intensità è pari a

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \mu \frac{N}{R} i, \quad (2.2.33)$$

dove μ è la permeabilità magnetica dell'aria (si può considerare pari a quella nel vuoto), N è il numero di spire di una bobina, i l'intensità di corrente nelle bobine e R il loro raggio.

Un elettrone che si muove in un campo magnetico è soggetto alla forza di Lorentz. Se il campo magnetico è omogeneo e la velocità è in direzione perpendicolare al campo, il modulo della forza di Lorentz si può scrivere come $F = evB$. Tale forza non compie lavoro, ma ha effetto solamente sulla direzione del moto degli elettroni. È, infatti, perpendicolare alla velocità, ma anche al campo magnetico, e si tratta di una forza centripeta che obbliga gli elettroni a percorrere un'orbita circolare. Il raggio r dell'orbita si determina dalla relazione

$$F = evB = m \frac{v^2}{r}. \quad (2.2.34)$$

Combinando le formule precedenti si trova

$$\frac{e}{m} = \frac{2V}{\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \mu \frac{N}{R} i r\right)^2}. \quad (2.2.35)$$

I valori di R e di N sono noti, quelli di V e i indicati rispettivamente dal voltmetro e dall'ampereometro, r si misura grazie alla presenza di una scala graduata posta dietro l'ampolla.

Se si avvicina un magnete all'ampolla, il campo magnetico si compone con quello delle bobine. Il moto risultante è una composizione di un moto rettilineo e di uno circolare e la traiettoria degli elettroni diventa un'elica cilindrica.

Questo esperimento permette non solo di chiarire il ruolo della forza di Lorentz e come questa dipenda dalla velocità delle cariche e dal campo magnetico alle quali sono soggette, ma anche di discutere l'effetto termoionico e introdurre un fenomeno quantistico come quello delle diseccitazioni atomiche (grazie al quale la traiettoria degli elettroni diventa visibile).

2.2.5.1 Campo magnetico tra le bobine di Helmholtz

Le bobine di Helmholtz vengono spesso utilizzate in situazioni in cui è necessaria la presenza di un campo magnetico uniforme, come per la misura della carica specifica dell'elettrone.

Ricordiamo che una coppia di bobine identiche, come quelle in figura 2.2.23, si dice di Helmholtz quando sono posizionate ad una distanza pari al loro raggio R e collegate in serie in modo che siano percorse dalla medesima corrente nello stesso verso. Quando queste condizioni si verificano allora le linee di campo sono dirette come nella parte destra in figura 2.2.23.

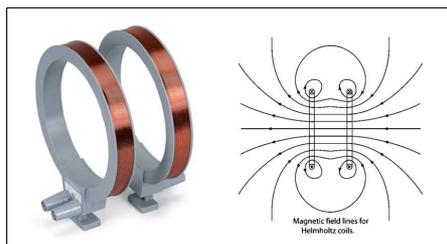
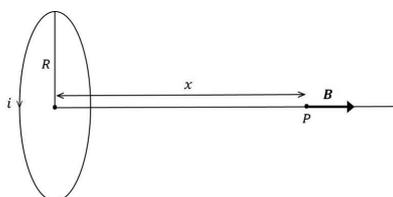


Figura 2.2.23: A sinistra le bobine di Helmholtz. A destra le linee di campo che si genera quando le bobine sono attraversate da corrente. Il campo è uniforme nella regione tra le due bobine.

Vediamo come è fatto il campo magnetico che si genera quando le bobine sono percorse da corrente.

Consideriamo inizialmente una spira di raggio R .



Se attraversata da una corrente i , la spira genera sul suo asse un campo magnetico il cui modulo varia con la distanza x dal centro con la seguente formula:

$$B = \frac{\mu}{2} i \frac{R^2}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}} \quad (2.2.36)$$

Per calcolare il campo magnetico per le bobine di Helmholtz bisogna moltiplicare quest'espressione per il numero di avvolgimenti N , sostituire la distanza di ciascuna bobina dal punto in cui si vuole calcolare il campo e sommare. L'andamento del campo magnetico in funzione della distanza si ottiene facilmente utilizzando il foglio di calcolo. In figura 2.2.24 è mostrato l'andamento spaziale di B ricostruito con il foglio elettronico per le bobine di Helmholtz con 130 avvolgimenti, raggio pari a 15 cm e corrente uguale a 1,35 A.

È evidente come nella zona tra $-R/2$ e $R/2$ (cioè nella zona tra le due bobine) il campo possa essere considerato costante. Quando la distanza tra le due bobine è minore o maggiore del loro raggio quest'uniformità si perde. L'attività con il foglio di calcolo permette di lavorare con la sovrapposizione dei campi magnetici al variare delle grandezze in gioco.

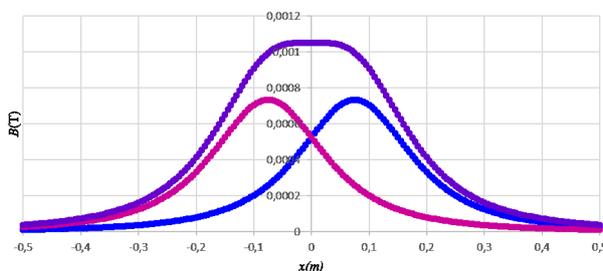


Figura 2.2.24: Andamento spaziale dei campi magnetici delle singole bobine e loro sovrapposizione quando la distanza tra le due è uguale al loro raggio.

2.2.6 Spettri continui. Misura della costante di Stefan-Boltzmann.

Consideriamo una lampadina ad incandescenza. In questo tipo di sorgenti luminose la luce viene prodotta dal riscaldamento di un filamento di tungsteno attraverso cui passa la corrente elettrica. L'utilizzo del tungsteno (Wolframio) è giustificato dal suo alto punto di fusione, il più alto nella tavola degli elementi: fonde a 3410°C e bolle a circa 5927°C . L'efficienza di queste lampadine è molto più bassa rispetto a quella di altri tipi di illuminazione elettrica: convertono meno del 5% dell'energia che usano nella luce visibile, il resto viene emesso nell'infrarosso. La temperatura del filamento di tungsteno di una lampadina aumenta all'aumentare della differenza di potenziale ai suoi capi e quindi la curva caratteristica corrente-tensione non è lineare. Un primo esperimento può riguardare proprio la verifica di questa non linearità. La configurazione dell'esperimento è la seguente: un generatore in continua (con tensione variabile, ad esempio da 0 a 20 V) alimenta la lampadina e, al variare della tensione di uscita, si legge la tensione con un voltmetro in parallelo alla lampadina (da 0 fino a valori di poco maggiori della tensione nominale indicata sulla lampadina) e la corrente con un amperometro in serie. In particolare, utilizziamo una lampada delle luci di posizione per auto da 12 V e due multimetri digitali, rispettivamente come voltmetro e come amperometro, per la lettura della tensione e della corrente. In figura 2.2.25 è mostrato un esempio di dati ottenuti da questo tipo di misura. Dal grafico si può notare la non linearità dell'andamento della corrente in funzione della tensione e si vede come i dati sperimentali sono ben rappresentati da una parabola dei minimi quadrati con un indice di correlazione prossimo a 1.

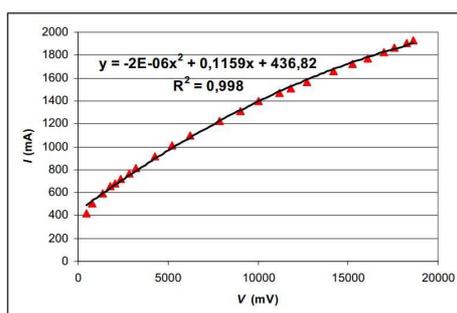


Figura 2.2.25: Curva caratteristica corrente-tensione per una lampadina con filamento di tungsteno.

Nelle figure 2.2.26-a e 2.2.26-b si riportano, invece, i grafici della resistività in funzione della temperatura e della temperatura in funzione della resistività, rispettivamente. Anche se si potrebbe adoperare senza grossi errori una relazione lineare, la ricerca con le curve dei minimi quadrati mostra che la resistività, e quindi la resistenza, (nota la temperatura) e la temperatura (nota la resistività) possono essere calcolate mediante una funzione potenza con grande accuratezza (l'indice di correlazione è prossimo a 1). Le relazioni sono le seguenti:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\gamma \quad \text{con } \gamma = 1,205 \quad (2.2.37)$$

$$T = T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/\gamma} \quad \text{con } 1/\gamma = 0,8298 \quad (2.2.38)$$

con T_0 e ρ_0 temperatura e resistività iniziali (a temperatura ambiente). Ricordiamo come il rapporto tra resistività sia pari al rapporto tra resistenze quando la geometria del conduttore rimane invariata.

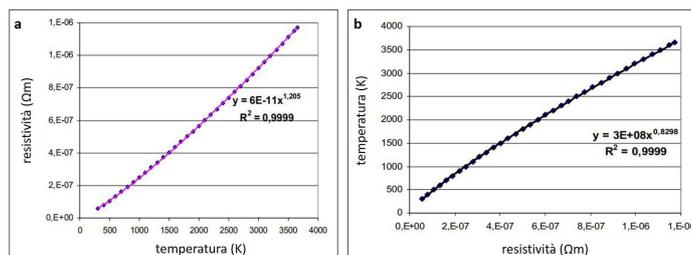


Figura 2.2.26: Andamento della resistività in funzione della temperatura (a) e della temperatura in funzione della resistività (b).

Il filamento della lampadina emette radiazione elettromagnetica e può essere considerato un'approssimazione di *corpo nero*. Un corpo nero è un oggetto ideale che assorbe la totalità della radiazione che incide su di esso e, non riflettendo alcuna radiazione, appare completamente nero. Un corpo nero riscaldato ad una temperatura sufficientemente elevata emette radiazioni e l'energia emessa è isotropa e dipende solo dalla temperatura. Se si rappresenta l'energia elettromagnetica in funzione della frequenza, o della lunghezza d'onda, si ottiene quello che è comunemente chiamato *spettro d'emissione*. Lo spettro di un corpo nero è uno spettro continuo ed è caratterizzato da un andamento a campana asimmetrica come in figura 2.2.27.

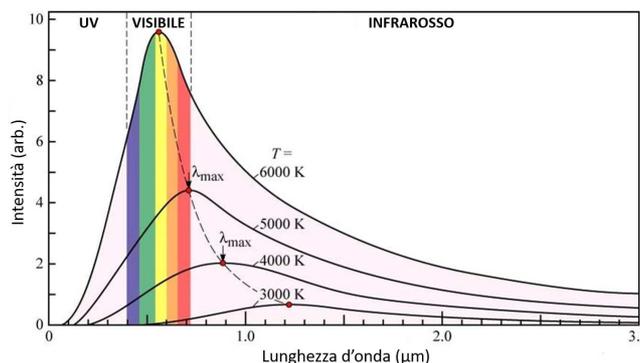


Figura 2.2.27: Spettro di corpo nero per diversi valori della temperatura.

Aumentando la temperatura, lo spettro cambia e le curve presentano un massimo sempre più alto (maggiore emissione di energia) in corrispondenza di valori della lunghezza d'onda via via più bassi (cioè per frequenze più alte). Se consideriamo solo la parte del visibile, il colore può essere un'indicazione della temperatura del corpo nero.

Lo spettro di corpo nero è descritto fenomenologicamente da una legge empirica, la *legge di Wien*, e dalla *legge di Stefan-Boltzmann*, ricavata dapprima sperimentalmente da Stefan e poi dedotta grazie a considerazioni di termodinamica da Boltzmann.

La legge di Wien, anche nota come legge dello spostamento di Wien, stabilisce che la frequenza massima di uno spettro di corpo nero a temperatura T cresce linearmente con T e, in termini di lunghezza d'onda si scrive:

$$\lambda_{max}T = b, \quad (2.2.39)$$

dove con $b = 2,8978 \text{ m} \cdot \text{K}$ si è indicata la costante di Wien.

La legge di Stefan-Boltzmann afferma che l'energia emessa per unità di tempo e per unità di superficie da un corpo nero cresce con la quarta potenza della temperatura:

$$W(T) = \sigma T^4, \quad (2.2.40)$$

dove $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ è la costante di Stefan-Boltzmann.

La prima trattazione teorica sull'emissione del corpo nero venne sviluppata su basi di fisica classica e portò alla *legge di Rayleigh-Jeans* che ben presto, però, mostrò tutti i suoi limiti. Le predizioni classiche erano, infatti, in totale disaccordo con i dati ottenuti sperimentalmente, come evidente dalla figura 2.2.28.

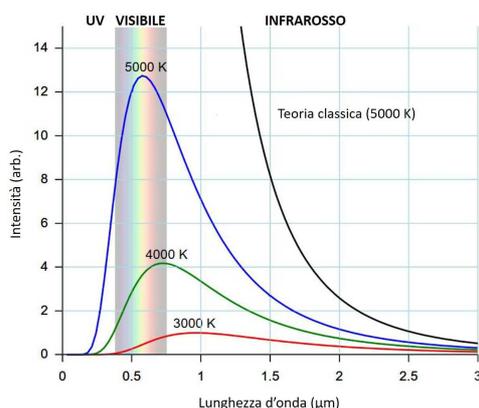


Figura 2.2.28: Catastrofe ultravioletta: al diminuire della lunghezza d'onda, l'andamento classico devia completamente da quello sperimentale.

L'andamento teorico è in accordo con le curve sperimentali soltanto per grandi valori della lunghezza d'onda, mentre presenta una crescita indefinita al diminuire di questa. Il problema è noto come *catastrofe ultravioletta*, per sottolineare il fatto che si presenta nella regione ad alta frequenza dello spettro elettromagnetico. La questione fu risolta da Plank con l'ipotesi della quantizzazione della radiazione elettromagnetica, considerata, cioè, come costituita da quanti di energia $E = h\nu$, con $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}^{-1}$ *costante di Plank* e ν frequenza della radiazione.

La teoria del corpo nero ha di certo un grande fascino ed un'enorme importanza storica, per cui senza dubbio è fondamentale raccontarne la fenomenologia, evitando, però, di addentrarsi negli aspetti teorici troppo complicati per gli studenti della scuola superiore.

Tornando alla lampadina, sfruttando quanto descritto fin qui, si può effettuare una misura della costante di Stefan-Boltzmann. La potenza di emissione del filamento è infatti data da:

$$P = e\sigma AT^4 \quad (2.2.41)$$

dove con e si è indicata l'emissività della superficie, compresa tra 0 e 1 ($e = 1$ per il corpo nero ideale) e A è l'area della superficie. Facendo riferimento ai dati di tensione e corrente dell'esperienza della curva caratteristica descritta in precedenza e conoscendo la dipendenza della temperatura dalla resistività, si procede con una misura della temperatura e della resistenza iniziale, si calcolano la potenza e la temperatura e con un fit lineare si ricava la costante di proporzionalità tra P e T^4 , ossia la pendenza della retta $e\sigma A$. L'area A si trova rompendo la lampadina e misurando con il calibro il diametro e la lunghezza del filamento, l'emissività e del tungsteno si assume essere pari a 0,5 ed è quindi immediato risalire alla costante di Stefan-Boltzmann σ .

Per verificare che effettivamente lo spettro del filamento di tungsteno sia uno spettro continuo come quello di un corpo nero abbiamo utilizzato uno spettrometro digitale interfacciato al computer. Lo spettro, acquisito tramite il relativo software, è mostrato in figura 2.2.29.

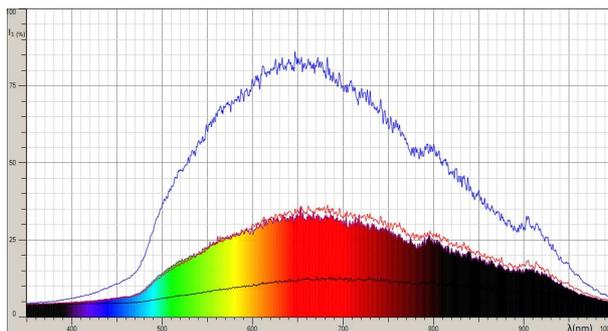


Figura 2.2.29: Spettro di emissione di un filamento di tungsteno per diverse temperature.

Per confrontare le misure e approfondire il concetto di spettro di emissione abbiamo acquisito gli spettri relativi ad altre sorgenti luminose. In figura 2.2.30 sono mostrati gli spettri di una torcia con filtri di colore blu, verde e rosso mentre in figura 2.2.31 lo spettro di una torcia a LED. Come si può notare, anche quest'ultimo è uno spettro continuo, ma presenta un picco verso l'ultravioletto. Uno spettro continuo, ad esempio quello della luce solare, può anche essere visualizzato se si utilizza un CD, che con i suoi solchi sulla superficie si comporta come un reticolo di diffrazione, oppure degli opportuni occhiali diffrattivi.

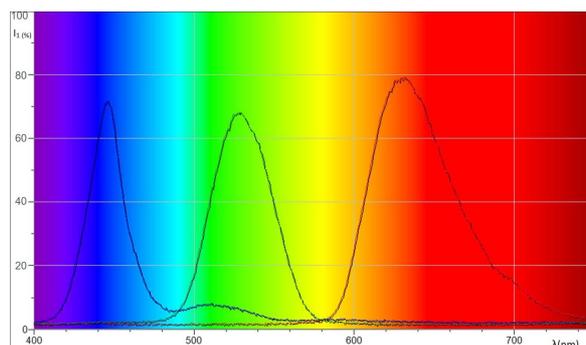


Figura 2.2.30: Spettro di emissione di una torcia con filtri colorati.

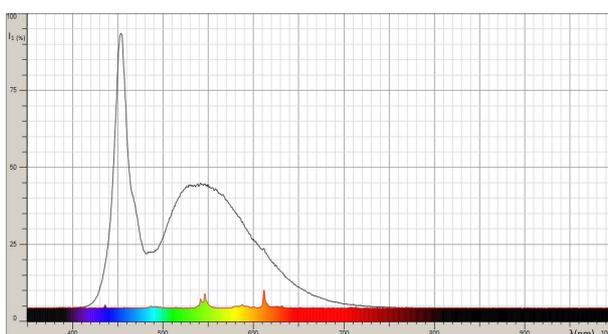


Figura 2.2.31: Spettro di emissione di una torcia a LED.

2.2.7 Spettri discreti. Struttura atomica: da Thomson a Schrödinger.

Se, a differenza di quanto visto nella precedente sezione, si utilizza una lampada al cadmio o una lampada al sodio, il profilo dello spettro acquisito con lo spettrometro cambia completamente: compaiono dei picchi molto stretti in corrispondenza di alcune lunghezze d'onda, compaiono le

cosiddette righe spettrali (figure 2.2.32 e 2.2.33). Lampade di questo tipo sono dette lampade a scarica e si basano sull'emissione luminosa da parte di un gas monoatomico ionizzato.

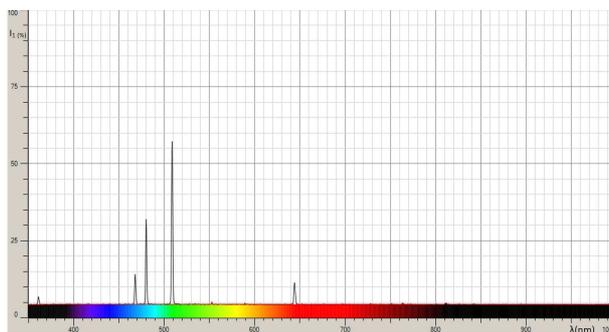


Figura 2.2.32: Spettro di emissione del cadmio.

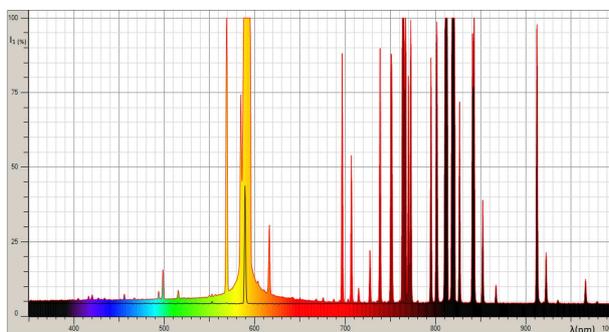


Figura 2.2.33: Spettro di emissione del sodio.

Lo spettro non è più continuo, ma ci troviamo di fronte ad uno spettro discreto. La spiegazione di quanto accade risiede nella struttura dell'atomo [33].

Il primo modello atomico dopo la scoperta dell'elettrone è dovuto a Thomson, che nel 1904 propose che l'atomo fosse costituito da una sfera di carica positiva uniformemente distribuita al cui interno si trovassero disseminati gli elettroni. Per questo motivo si parla di *modello a panettone*. Il modello di Thomson non resse alle prove sperimentali e venne confutato nel 1911 dagli esperimenti del fisico neozelandese Ernest Rutherford. L'apparato di Rutherford è illustrato in figura 2.2.34.

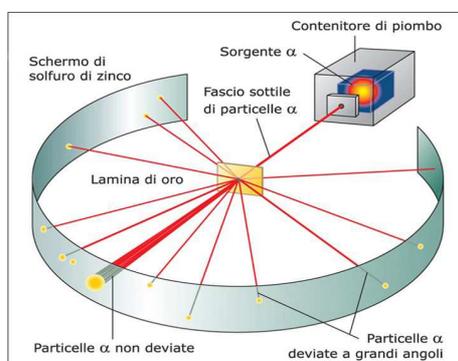


Figura 2.2.34: Illustrazione dell'apparato sperimentale di Rutherford.

L'esperimento consisteva nel bombardare una lamina d'oro con un fascio di particelle α e osservarne la diffusione. Una misura degli angoli di diffusione avrebbe poi fornito informazioni sulla struttura del bersaglio (gli atomi di oro). Le particelle α sono nuclei di elio (la loro massa è circa 10000 volte quella dell'elettrone) e vengono spontaneamente emesse da alcuni elementi radioattivi. Oltre la lamina queste venivano intercettate da uno schermo fluorescente ed un piccolo lampo di luce segnalava l'impatto. Secondo il modello di Thomson, come illustrato nella parte sinistra della figura 2.2.35, le particelle avrebbero dovuto subire al più piccole deflessioni, ma l'esperimento mostrò che esisteva una probabilità non nulla che le particelle venissero diffuse ad angoli superiori di 90° .

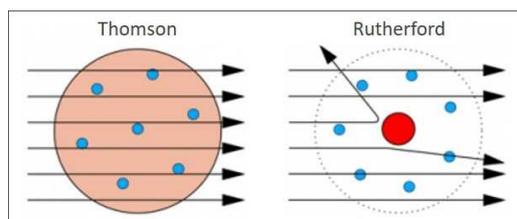


Figura 2.2.35: Modelli atomici di Thomson e Rutherford a confronto.

Per dirla con le parole di Rutherford: "*Era come sparare palle di cannone da 45 cm contro un foglio di carta e vederselo tornare indietro*". Da qui l'idea di un nuovo modello secondo cui l'atomo fosse costituito da un nucleo con carica positiva, nel quale è concentrata di fatto tutta la massa, e dagli elettroni, molto più leggeri, che gli ruotano attorno, come a destra in figura 2.2.35. Il modello viene, per questo motivo, detto *modello planetario*, dove la forza gravitazionale di attrazione tra Sole e pianeti è rimpiazzata dalla forza attrattiva tra nucleo positivo ed elettroni negativi. Le dimensioni del nucleo ($\sim 10^{-14}$ m), molto inferiori a quelle atomiche ($\sim 10^{-10}$ m), sono tali da render conto della deflessione osservata per le particelle α .

Il modello di Rutherford presentava tuttavia gravi difetti. Il primo problema riguarda la stabilità dell'atomo. Un elettrone che ruota intorno al nucleo è continuamente soggetto ad un'accelerazione centripeta e, come previsto dalle leggi dell'elettrodinamica, una carica accelerata perde energia cinetica sotto forma di emissione di radiazione elettromagnetica. Questa perdita d'energia comporta una diminuzione del raggio dell'orbita dell'elettrone, per cui la sua traiettoria non sarebbe più circolare, ma una spirale che porterebbe la particella a cadere sul nucleo. L'atomo è invece un sistema stabile. Il modello era inoltre incapace di spiegare le righe spettrali tipiche di ogni elemento che erano state sperimentalmente osservate (per l'atomo di idrogeno erano state empiricamente descritte già nella seconda metà del XIX secolo da Balmer prima e Rydberg poi). Nel 1912 il fisico danese Niels Bohr, resosi conto dell'inefficacia del modello planetario, osservando gli spettri dell'atomo di idrogeno (che ha un unico elettrone) propose un modello atomico che si basa sui seguenti postulati:

1. negli atomi, normalmente gli elettroni non emettono radiazione elettromagnetica, poiché si muovono lungo orbite preferenziali, orbite stazionarie, caratterizzate ognuna da una ben definita quantità di energia;
2. l'emissione di energia sotto forma di radiazione elettromagnetica si verifica solo quando un elettrone salta da un'orbita ad energia maggiore ad un'altra ad energia minore; la frequenza della radiazione emessa è determinata dalla teoria dei quanti di Plank:

$$E_f - E_i = h\nu, \quad (2.2.42)$$

dove con E_f ed E_i si sono indicate le energie dei livelli finale e iniziale tra i quali si verifica il salto.

Bohr fu il primo a intuire che la distribuzione dell'energia atomica fosse discreta aggiungendo al modello planetario l'idea che la distanza tra le orbite intorno al nucleo fosse fissata dalla condizione di quantizzazione. Le righe di emissione corrispondevano allora alla radiazione emessa in transizioni da stati di energia maggiore (stati eccitati) a stati di energia minore. Nel 1915, il fisico tedesco Sommerfeld indicò una correzione al modello di Bohr aggiungendo alle orbite circolari altre orbite quantizzate ellittiche, delle quali il nucleo occupava uno dei fuochi. Tuttavia il modello di Bohr-Sommerfeld funzionava bene solo per l'idrogeno e falliva per atomi con più elettroni. In seguito poi all'introduzione del principio di indeterminazione, enunciato da Heisenberg nel 1927, diventò chiaro che non avesse più senso parlare di traiettoria, di orbita, di un elettrone né che si potesse definire con certezza dove esso si trovasse in un dato momento. Tutto quello che si poteva conoscere era, allora, la probabilità di trovare l'elettrone in un certo punto dello spazio in un certo istante di tempo. Si passò, così, dal concetto di orbita, a quello di orbitale e quindi di funzione d'onda. Ispirato da ciò, e dal lavoro di Louis de Broglie del 1924 sulle onde di materia, Erwin Schrödinger pensò che il comportamento dell'elettrone intorno al nucleo dovesse essere descritto da un'equazione delle onde. Era il 1925 e scrisse per la prima volta la famosa *equazione di Schrödinger*.

Nel 1927 si tenne a Bruxelles la quinta Conferenza Solvay sul tema "elettroni e fotoni" e le più grandi menti scientifiche del tempo si incontrarono per discutere delle scoperte che avevano posto le basi per lo sviluppo della fisica moderna. In quell'occasione fu scattata quella che poi è stata definita "la foto più intelligente della storia" in cui 17 delle 29 persone ritratte avevano o avrebbero vinto il premio Nobel per fisica o per la chimica. Marie Curie, unica donna tra i partecipanti, fu la sola a vincerli entrambi.



Figura 2.2.36: Partecipanti alla Conferenza Solvay del 1927.

Fila posteriore: Piccard, Henriot, Ehrenfest, Herzen, de Donder, Schrödinger, Verschaffelt, Pauli, Heisenberg, Fowler, Brillouin.

Fila centrale: Debye, Knudsen, Bragg, Kramers, Dirac, Compton, de Broglie, Born, Bohr.

Fila anteriore: Langmuir, Planck, Curie, Lorentz, Einstein, Langevin, Guye, Wilson, Richardson.

2.2.8 Effetto fotoelettrico e misura della costante di Plank

L'effetto fotoelettrico [34] è quel fenomeno per cui si ha emissione di elettroni da un materiale, tipicamente un metallo, quando questo viene investito da radiazione elettromagnetica di frequenza al di sopra di una certa soglia che dipende dal materiale. Fu scoperto nel 1887 da Hertz che, mentre conduceva i suoi esperimenti per generare e rivelare onde elettromagnetiche, si accorse che la scarica tra i due elettrodi diventava più intensa quando questi venivano illuminati con

radiazione ultravioletta. Lo studio del fenomeno fu però approfondito qualche anno più tardi (1900) da Lenard che utilizzò l'apparato sperimentale schematizzato in figura 2.2.37.

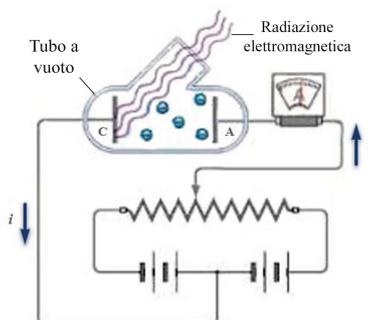


Figura 2.2.37: Schema dell'apparato sperimentale impiegato da Lenard per lo studio dell'effetto fotoelettrico.

L'apparato è costituito da un tubo trasparente alla radiazione (tipicamente quarzo), in cui viene praticato il vuoto. Al suo interno si trovano un catodo, su cui viene fatta incidere della radiazione elettromagnetica, ed un anodo che raccoglie gli elettroni emessi dal catodo, detti fotoelettroni. La corrente, misurata con un amperometro, è funzione del numero di fotoelettroni emessi nell'unità di tempo dal catodo. Il valore della differenza di potenziale tra anodo e catodo può essere variato grazie ad un potenziometro e un invertitore di polarità permette di cambiarne il segno. Gli aspetti fenomenologici dell'esperimento si riassumono nei seguenti punti:

- esiste una frequenza di soglia ν_s della radiazione incidente al disotto della quale non si verifica nessuno effetto, anche per radiazioni di intensità molto elevate; il valore di ν_s dipende dal metallo di cui è fatto il catodo;
- variando la differenza di potenziale tra anodo e catodo ci si accorge che esiste un potenziale d'arresto negativo V_a che non dipende dall'intensità I della radiazione incidente e al di sotto del quale nessun elettrone emesso raggiunge l'anodo; l'energia cinetica massima K_{max} , cioè l'energia dei fotoelettroni più veloci, è quindi data da

$$K_{max} = eV_a \quad (2.2.43)$$

ed è indipendente da I . Il potenziale di arresto, cresce linearmente con la frequenza ν della radiazione incidente; aumentando la differenza di potenziale su valori positivi, la corrente raggiunge velocemente un valore di saturazione (figura 2.2.38);

- per $\nu > \nu_s$, l'emissione dei fotoelettroni è istantanea, indipendentemente da I ;
- il numero di elettroni emessi nell'unità di tempo, e quindi l'intensità di corrente, aumenta all'aumentare di I , come si vede in figura 2.2.38.

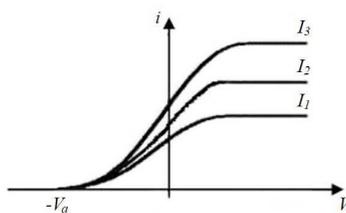


Figura 2.2.38: Intensità di corrente in funzione della differenza di potenziale tra anodo e catodo per tre diversi valori dell'intensità di radiazione ($I_1 < I_2 < I_3$).

I primi tre punti sono classicamente inspiegabili. L'energia classica trasportata dalla radiazione è legata alla sua intensità, che a sua volta dipende dall'ampiezza del campo elettrico e non esiste alcuna dipendenza da ν . Ci si aspetterebbe che un aumento di I riesca a fornire agli elettroni un'energia tale da fuoriuscire dal metallo, indipendentemente dalla frequenza della radiazione. In seguito a questo aumento, anche l'energia cinetica con cui essi fuoriescono dovrebbe aumentare, ma il potenziale d'arresto resta lo stesso. Inoltre, l'emissione dovrebbe avvenire quando un elettrone nel metallo ha assorbito abbastanza energia da superare il potenziale, detto potenziale di estrazione, che, in condizioni normali, impedisce all'elettrone di uscire dal metallo. Allora l'emissione dovrebbe avvenire dopo un certo periodo di tempo dall'arrivo della radiazione incidente, tanto maggiore quanto più debole è I .

La spiegazione dell'effetto fotoelettrico fu data, nel 1905, da Einstein, che, ispirato dal lavoro di Planck per il corpo nero, ipotizzò che la radiazione elettromagnetica fosse quantizzata, cioè emessa per pacchetti, quanti, di energia, successivamente chiamati fotoni. Una radiazione di frequenza ν consiste di fotoni di energia $h\nu$, con h costante di Planck, e la sua intensità dipende dal numero di fotoni. Secondo Einstein l'effetto fotoelettrico deriva da un'interazione uno a uno tra fotone ed elettrone e si verifica quando

$$h\nu \geq W_e, \quad (2.2.44)$$

con W_e potenziale di estrazione del metallo. L'energia restante si ritrova sotto forma di energia cinetica del fotoelettrone e si ha

$$K_{max} = h\nu - W_e. \quad (2.2.45)$$

La relazione (2.2.44) spiega l'esistenza di una frequenza di soglia, precisamente $\nu_s = W_e/h$. Siccome un elettrone del catodo assorbe un'energia pari ad $h\nu$, l'emissione avviene immediatamente e non dipende da I . Intensità di radiazione debole si traduce in un numero basso di fotoni nel fascio incidente e quindi pochi fotoelettroni. L'energia cinetica K_{max} non dipende da I , ed ecco perché il valore del potenziale d'arresto non varia.

La (2.2.45) è una relazione lineare tra K_{max} e ν e la pendenza della retta è data dalla costante di Planck. L'effetto fotoelettrico può allora essere sfruttato per misurare h , misurando i valori del potenziale di arresto per radiazioni di diversa frequenza. Un fit lineare restituirà poi la pendenza della retta. Prima di discutere l'esperienza, ma soprattutto prima di proporla alla classe, bisogna accertarsi che la fenomenologia e la successiva spiegazione dell'effetto fotoelettrico sia del tutto chiara. In aiuto interviene un'applet di cui in figura 2.2.39 è mostrato uno screenshot.

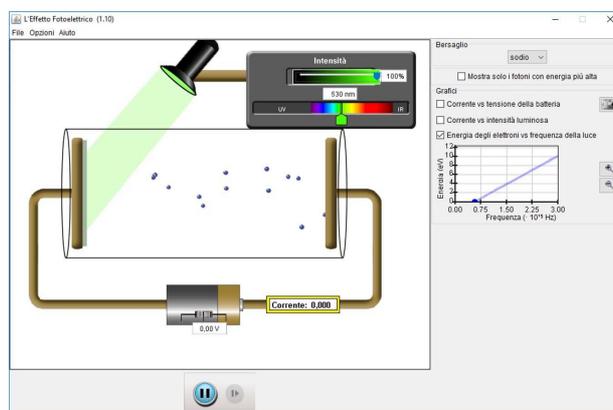


Figura 2.2.39: Screenshot dell'applet per lo studio dell'effetto fotoelettrico, scaricabile all'indirizzo <https://phet.colorado.edu/it/simulation/legacy/photoelectric>.

La simulazione riproduce l'apparato di Lenard. Si può modificare la lunghezza d'onda, e quindi la frequenza della radiazione, la sua intensità e variare la differenza di potenziale tra anodo e catodo. Si visualizza la curva caratteristica $i - V$, l'andamento dell'intensità di corrente in funzione dell'intensità della radiazione e l'andamento lineare dell'energia cinetica dell'elettrone in funzione di v . Un tasto permette poi di cambiare il materiale di cui è costituito il catodo e verificare come la frequenza di soglia dipenda da esso. Fatto ciò si può passare alla misura della costante di Planck. L'apparato utilizzato è mostrato in figura, e, in realtà, si basa sul cosiddetto effetto fotoelettrico interno, che si verifica quando il materiale su cui incide la radiazione è un semiconduttore.



Figura 2.2.40: Apparato per la misura della costante di Planck.

In questo caso gli elettroni liberati dalla radiazione restano all'interno del materiale, disponibili alla conduzione. La circostanza non cambia la sostanza del fenomeno e la relazione (2.2.45) continua a valere. Come sorgenti di radiazione si utilizzano dei LED di cinque diversi colori. Per ogni frequenza, si collega il LED allo strumento in maniera tale che la radiazione incida sulla fotocellula e si varia la differenza di potenziale finché non si annulla la corrente. Si trova così il valore del potenziale d'arresto. Il costruttore fornisce un foglio di calcolo dove inserire questi valori, generando automaticamente la retta di regressione lineare, di cui in figura è mostrato un esempio, e fornisce il valore della pendenza della retta, cioè della costante di Planck, con un'incertezza percentuale pari a circa lo 0,08%.

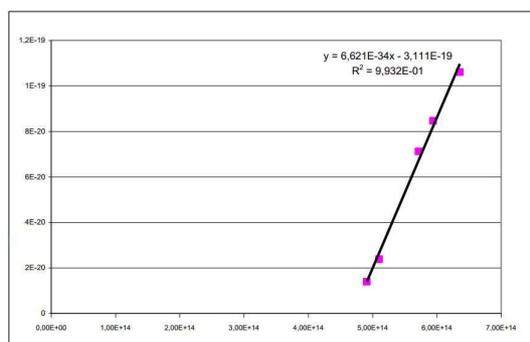


Figura 2.2.41: Retta dei minimi quadrati per la misura della costante di Planck.

2.2.9 Effetto Compton e interazione radiazione-materia

Uno degli esperimenti alla base dello sviluppo della meccanica quantistica è l'esperimento ideato dal fisico statunitense Arthur Compton, esperimento che gli valse il premio Nobel nel 1927 grazie alla scoperta dell'effetto che porta il suo nome. L'effetto Compton confermò definitivamente il comportamento corpuscolare della radiazione elettromagnetica ed è quindi annoverato tra i principali contributi all'affermazione delle teorie quantistiche.

In questo lavoro di tesi si è pensato di trattare un esperimento incentrato sull'effetto Compton, da proporre agli insegnanti prima e agli studenti poi, cosicché potessero rendersi conto di

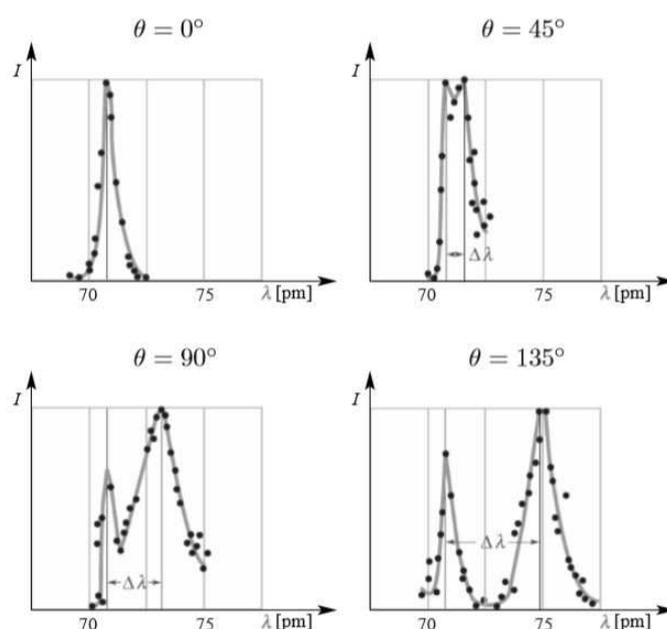


Figura 2.2.42: Risultati sperimentali ottenuti da Compton nel 1923.

come si conduce un esperimento di laboratorio inerente ad un argomento approfondito in classe e discusso nel testo da loro utilizzato. Molto spesso, infatti, non solo gli allievi, ma anche i docenti, non hanno mai avuto la possibilità di accedere ad alcun tipo di dato sperimentale che permettesse loro di contestualizzare e comprendere profondamente i fenomeni scientifici affrontati.

L'effetto Compton è un fenomeno di scattering osservato per la prima volta inviando un fascio di raggi X su un cristallo di grafite e misurando l'intensità della radiazione diffusa in funzione della sua lunghezza d'onda. Compton osservò che, sebbene la radiazione incidente fosse essenzialmente monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 7,09 \times 10^{-11}$ m, nella radiazione diffusa era presente una nuova lunghezza d'onda λ' che differiva da λ di una quantità funzione dell'angolo di diffusione. I dati sperimentali ottenuti da Compton sono riportati in figura 2.2.42 [35]. Detto θ l'angolo di diffusione, si vede chiaramente che la radiazione diffusa con $\theta = 0$, ossia la radiazione che continua la sua propagazione nella stessa direzione che aveva prima di interagire con la grafite, contiene solo la lunghezza d'onda iniziale λ . Al contrario, per $\theta > 0$ si osserva un altro picco d'intensità corrispondente alla lunghezza d'onda $\lambda' > \lambda$.

In figura 2.2.43 è mostrato uno schema dell'apparato sperimentale utilizzato da Compton. I raggi X venivano prodotti grazie a un tubo radiogeno da una sorgente di molibdeno e, una volta diffusi dal blocco di grafite, osservati grazie ad uno spettrometro di Bragg. Lo spettrometro è costituito da un cristallo di calcite per diffrangere i raggi X e di una camera di ionizzazione per rivelarli. La struttura è rotante così da poter rivelare radiazione ad angoli di diffusione diversi. Dal momento che la spaziatura dei piani cristallini nella calcite è nota, l'angolo di diffrazione dà una misura accurata della lunghezza d'onda.

Il risultato sperimentale ottenuto da Compton era in totale contraddizione con le previsioni della fisica classica. Classicamente, infatti, ci si aspetta che gli elettroni liberi del cristallo, sotto l'azione del campo elettrico oscillante della radiazione incidente, compiano oscillazioni della stessa frequenza e quindi emettano radiazione diffusa in tutte le direzioni, ma della stessa frequenza dell'onda incidente. Compton spiegò i dati ottenuti assumendo che la radiazione

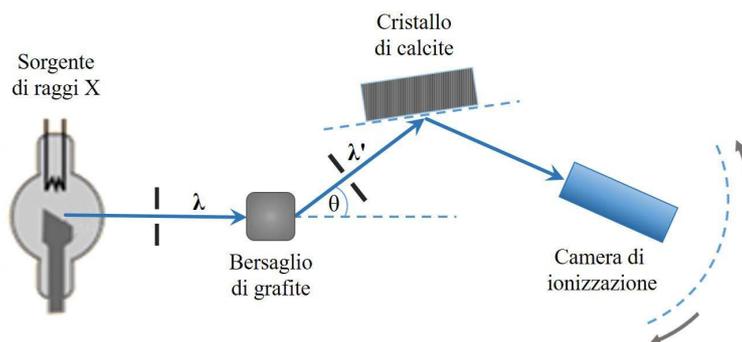


Figura 2.2.43: Schema dell'apparato sperimentale utilizzato da Compton.

incidente fosse costituita da un fascio di fotoni di energia $E = h\nu$ ed impulso $p = E/c = h/\lambda$. Egli ipotizzò un urto elastico tra un fotone incidente ed un elettrone inizialmente fermo, come schematizzato in figura 2.2.44.

Nell'articolo pubblicato nel 1923 con il titolo "A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements" [36] affermò:

[...] un cambiamento di lunghezza d'onda nella diffusione è direttamente contrario alla teoria della diffusione di Thomson, perché questa richiede che gli elettroni diffusori [...] diano origine a radiazione esattamente della stessa frequenza della radiazione incidente su di loro. Né c'è modificazione della teoria [...] che suggerisca una via d'uscita da questa difficoltà. Tale fallimento fa apparire improbabile che una spiegazione soddisfacente della diffusione dei raggi X possa essere raggiunta sulla base dell'elettrodinamica classica. [...] possiamo supporre che ogni particolare quanto di raggi X [...] trasferisca tutta la sua energia ad un particolare elettrone. Questo elettrone a sua volta invierà il raggio in una data direzione, ad un certo angolo col fascio incidente. La deviazione del cammino del quanto di radiazione risulta in un cambiamento della sua quantità di moto. Di conseguenza, l'elettrone diffusore rinculerà con una quantità di moto eguale al cambiamento di quantità di moto del raggio X. L'energia del raggio deviato sarà uguale a quella del raggio incidente meno l'energia cinetica del rinculo dell'elettrone diffusore; e poiché il raggio deviato deve essere un quanto completo, la frequenza sarà ridotta nello stesso rapporto dell'energia. Così secondo la teoria quantistica ci dobbiamo aspettare che la lunghezza d'onda dei raggi X diffusi sia maggiore di quella dei raggi incidenti.

Sfruttando le nuove teorie della quantizzazione dell'energia di Planck e della relatività ristretta

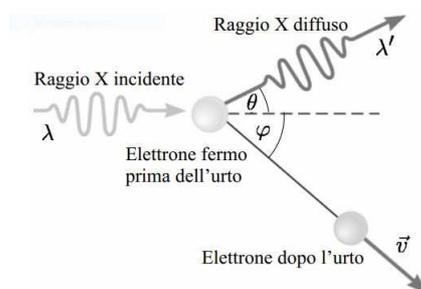


Figura 2.2.44: Diffusione di un fotone da parte di un elettrone.

di Einstein, impose la conservazione dell'energia

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2, \quad (2.2.46)$$

e della quantità di moto nelle direzioni x e y

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + mv \cos \varphi, \quad (2.2.47)$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - mv \sin \varphi,$$

dove ν e ν' sono le frequenze del fotone incidente e diffuso, rispettivamente, $m_0 = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ è la massa a riposo dell'elettrone, $m = m_0/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ la sua massa relativistica e v la sua velocità dopo l'urto. A partire da queste relazioni, Compton dimostrò che la differenza tra la lunghezza d'onda della radiazione diffusa e quella incidente dipende unicamente dall'angolo di diffusione θ e non dalla lunghezza d'onda iniziale, secondo la seguente relazione:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta) = \lambda_c (1 - \cos \theta), \quad (2.2.48)$$

dove la costante λ_c è la cosiddetta lunghezza d'onda Compton. La quantità $\Delta\lambda$ è chiamata spostamento Compton.

Il picco relativo alla lunghezza d'onda incidente, visibile dai dati sperimentali in figura 2.2.42, si spiega considerando la diffusione della radiazione incidente con gli elettroni che rimangono legati all'atomo. In tal caso il fenomeno si descrive come l'urto di un fotone con un oggetto a riposo di massa M , data dalla massa atomica, con $M \gg m_0$ (per il carbonio $M \sim 22 \times 10^3 m_0$) e si ha quindi $\Delta\lambda \approx 0$. Per questo tipo d'urto la lunghezza d'onda diffusa è praticamente la stessa in qualunque direzione. La dipendenza dall'angolo di diffusione θ può essere studiata anche grazie ad un'applet di cui, in figura 2.2.45, è mostrato uno screenshot.

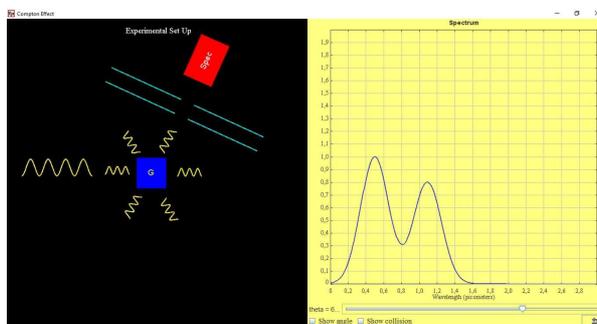


Figura 2.2.45: Screenshot di un'applet per lo studio dell'effetto Compton disponibile all'indirizzo <https://www.compadre.org/osp/items/detail.cfm?ID=10531>.

In questo lavoro di tesi, per osservare l'effetto Compton, è stata eseguita un'esperienza di laboratorio utilizzando raggi gamma emessi da isotopi radioattivi⁶. Questa tecnica permette agli studenti di vedere il fenomeno senza ricorrere a tecniche più complicate come quelle usate per i raggi X e consente, così, di realizzare un esperimento didatticamente fruibile che richiede, tra l'altro, un'apparecchiatura facilmente trasportabile. Si tratta di una tipica esperienza di spettroscopia gamma, che non è altro che lo studio quantitativo degli spettri di energia da fonti di raggi gamma. In particolare, è stata impiegata una sorgente di Cesio-137 (^{137}Cs) che produce raggi

⁶L'esperimento è stato realizzato nel laboratorio del dott. Luigi Campajola con la collaborazione del dott. Pierluigi Casolaro.

gamma secondo lo schema mostrato in figura 2.2.46. Il Cesio-137 ha un tempo di dimezzamento di circa 30,17 anni. Circa il 95 per cento decade ad un isomero nucleare metastabile di Bario, il Bario-137m. Il resto popola direttamente lo stato fondamentale di Bario-137, che è stabile. Il Bario-137m ha un tempo di dimezzamento di circa 153 secondi ed è responsabile per tutte le emissioni di raggi gamma in campioni di Cesio-137.

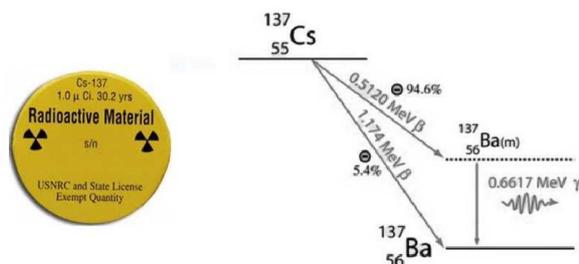


Figura 2.2.46: Campione di Cesio-137 e relativo schema di decadimento.

Le apparecchiature utilizzate nella spettroscopia gamma includono un rivelatore di energia sensibile alle radiazioni, l'elettronica di elaborazione dei segnali prodotti dal rivelatore, un analizzatore multicanale e relativi amplificatori e dispositivi di lettura dei dati per generare, visualizzare e memorizzare lo spettro. I rivelatori di spettroscopia gamma sono materiali all'interno dei quali si verifica un'interazione gamma [37].

L'obiettivo dell'esperienza è l'osservazione della diffusione Compton, ma in generale quando la radiazione gamma interagisce con la materia si possono avere tre principali meccanismi d'interazione: l'assorbimento fotoelettrico, la diffusione Compton e la produzione di coppie. I tre processi sono schematizzati in figura 2.2.47.

La probabilità che si verifichi uno dei tre processi dipende dal numero atomico del materiale e dall'energia del fotone incidente, come mostrato in figura 2.2.48. Le curve tracciate sono l'insieme dei punti in cui due tipi di interazione sono ugualmente probabili. L'effetto fotoelettrico predomina per i raggi gamma a bassa energia (fino a diverse centinaia di keV), la produzione di coppie prevale per i raggi gamma ad alta energia (oltre 5-10 MeV), e la diffusione Compton è il processo più probabile per energie comprese tra questi estremi.

Per quanto riguarda l'assorbimento fotoelettrico, il fotone incidente viene completamente assorbito dal nucleo bersaglio. L'energia del fotone è trasferita integralmente a un elettrone atomico che acquista un'energia sufficiente per essere espulso dall'atomo, prendendo il nome di fotoelettrone. Se indichiamo con E_b l'energia di legame dell'elettrone, essendo $h\nu$ l'energia del

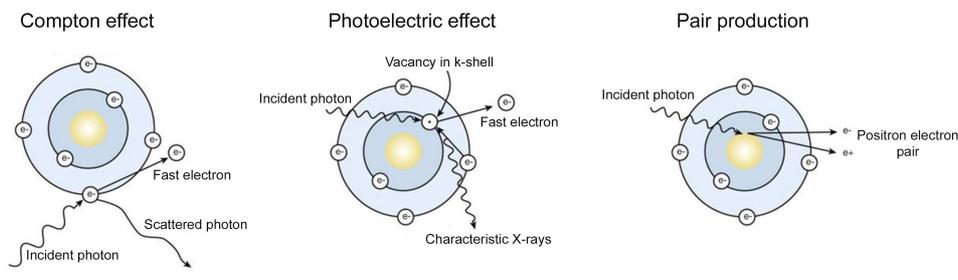


Figura 2.2.47: Schema dei tre principali processi d'interazione radiazione-materia.

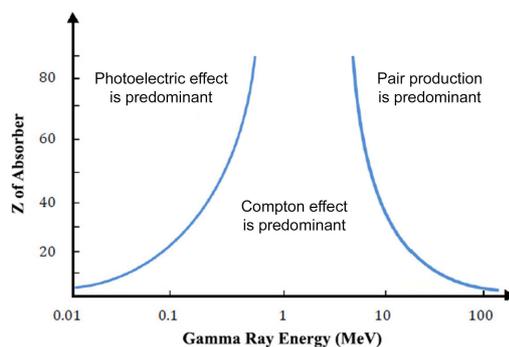


Figura 2.2.48: Rappresentazione del dominio dei tre principali processi di interazione radiazione-materia in funzione dell'energia della radiazione e del numero atomico Z del mezzo.

fotone incidente, il fotoelettrone verrà espulso con un'energia cinetica pari a

$$E = h\nu - E_b. \quad (2.2.49)$$

Tipicamente, l'elettrone proviene dall'orbita K e possiede un'energia di legame dell'ordine del keV, che è una quantità trascurabile rispetto all'energia del fotone gamma incidente. Questo tipo di processo risulta utile nel caso in cui si voglia misurare l'energia del raggio gamma incidente, in quanto si può assumere che corrisponda all'energia cinetica dell'elettrone uscente.

L'assorbimento fotoelettrico si presenta come un picco dovuto ai fotoelettroni emessi per assorbimento totale di tutta l'energia del fotone gamma incidente. In un processo di decadimento gamma, le radiazioni emesse sono monocromatiche e tutta la loro energia può essere ceduta al rivelatore, sia per mezzo di un singolo processo fotoelettrico che attraverso interazioni multiple; la distribuzione di impulsi risultante da più eventi di questo genere è detta fotopicco o full energy peak, ed è rappresentativa dell'energia dei fotoni interagenti. A causa della natura statistica dei processi che intervengono nella formazione del fotopicco, esso, piuttosto che corrispondere ad una riga stretta o più correttamente una funzione delta di Dirac, si presenta come una distribuzione gaussiana centrata attorno al valore corrispondente all'energia del fotone gamma incidente.

Per la diffusione Compton si ha un fotone gamma diffuso, la cui energia, calcolata a partite dall'equazione (2.2.48), è data da

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)}, \quad (2.2.50)$$

L'energia dell'elettrone dopo l'urto, che è l'energia ceduta dal fotone incidente, è data da

$$E = h\nu - h\nu' = h\nu \frac{\frac{h\nu}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)}{1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)}. \quad (2.2.51)$$

Per un angolo di diffusione $\theta = 0$, $h\nu = h\nu'$ e si ha il minimo dell'energia:

$$E_m = 0. \quad (2.2.52)$$

L'energia massima si ottiene per $\theta = 180^\circ$:

$$E_M = hv \frac{\frac{2hv}{m_0c^2}}{1 + \frac{2hv}{m_0c^2}}. \quad (2.2.53)$$

Fra i due casi estremi, $\theta = 0$ e $\theta = 180^\circ$, sono possibili tutti gli angoli e quindi l'elettrone può avere tutti i valori dell'energia compresi fra E_m e E_M . Si avrà, dunque, un continuo fra zero e la cosiddetta spalla Compton (Compton edge), la cui distanza dal fotopicco è data da

$$E_C = hv - E_M = \frac{hv}{1 + \frac{2hv}{m_0c^2}}. \quad (2.2.54)$$

Quando l'energia della radiazione incidente è molto elevata ($hv \gg m_0c^2/2$), E_C tende a un valore costante:

$$E_C \approx \frac{m_0c^2}{2} \approx 0,256 \text{ MeV}. \quad (2.2.55)$$

Nel terzo principale meccanismo di interazione radiazione-materia, la produzione di coppie, un raggio gamma converte tutta la sua energia in massa creando una coppia elettrone-positrone, cioè due particelle di carica opposta ma stessa massa. Il fenomeno ha luogo all'interno del campo Coulombiano del nucleo atomico. La presenza del nucleo è necessaria perché l'energia e la quantità di moto siano entrambe conservate. Il processo richiede un'energia minima pari a $2m_0c^2 = 1,02 \text{ MeV}$ e nel momento in cui si verifica, si ottiene un picco, detto picco di doppia fuga, a distanza $2m_0c^2$ dal fotopicco. Il positrone va facilmente incontro ad annichilazione con un elettrone, con la conseguente produzione di due fotoni gamma di 511 keV. In alcuni casi solo uno dei due fotoni viene assorbito dal rivelatore e lo spettro può presentare un picco, detto picco di singola fuga.

I raggi gamma prodotti dal decadimento del Cesio-137 hanno un'energia pari a 0,662 MeV, insufficiente per la produzione di coppie. Il fenomeno, quindi, non si presenta nell'esperimento in questione.

Oltre a quelli citati, si possono riscontrare altri tipi di effetti in seguito ai quali si troveranno ulteriori picchi sullo spettro misurato. Si possono avere, ad esempio, uno o più picchi dovuti alla fluorescenza X. Quello che succede è che un raggio gamma va ad eccitare un atomo che, tornando poi alla sua configurazione stabile, emette raggi X caratteristici dell'atomo stesso. Dal momento che negli esperimenti di spettroscopia si utilizza di solito molto piombo per schermare e collimare il fascio di raggi gamma, molto spesso si ritrova un picco dovuto ai raggi X generati dal piombo.

L'apparato sperimentale utilizzato per l'esperimento è del tipo mostrato in figura 2.2.49 e consiste in un rivelatore a scintillazione, un'alimentazione ad alta tensione, un sistema amplificatore e un analizzatore multicanale per misurare la distribuzione di energia dei raggi gamma rilevati [38]. Un computer consente, infine, l'acquisizione dei dati. Il rivelatore a scintillazione è composto da uno scintillatore, nel nostro caso un cristallo di ioduro di sodio (NaI) e da un fototubo e ha, inoltre, integrato il sistema di amplificazione.

In generale, gli scintillatori si suddividono in due categorie, scintillatori organici (plastici o liquidi) e scintillatori inorganici. Per quest'esperimento è stato impiegato uno scintillatore inorganico consistente in un cristallo di ioduro di sodio (NaI), di dimensioni pari a 50 mm. La forma dello spettro dipende dal tipo di scintillatore utilizzato. Se, infatti, ad esempio, si utilizza uno scintillatore plastico, scompare il picco fotoelettrico.



Figura 2.2.49: Apparato sperimentale per l'esperimento di spettroscopia gamma: (partendo da sinistra) alimentatore, multicanale, rivelatore (scintillatore, fototubo e amplificatore), mattoni in piombo per schermare e PC.

Il principale meccanismo di funzionamento di uno scintillatore è quello della fluorescenza: la radiazione incidente penetra nel rivelatore e interagisce con esso eccitando gli atomi o le molecole del materiale. Questi decadono poi rapidamente (da circa 10^{-9} s per gli organici a circa 10^{-6} s per quelli inorganici) emettendo luce nel visibile. Esistono altri processi di emissione di luce su scale di tempo maggiori. Si possono verificare, infatti, fenomeni di fosforescenza per i quali l'emissione avviene ad una lunghezza d'onda più grande e con un tempo caratteristico generalmente molto più lento rispetto alla fluorescenza, o anche fenomeni detti di fluorescenza ritardata, dove il tempo di emissione è sempre maggiore, ma la lunghezza d'onda è la stessa. Un buon scintillatore deve essere in grado di convertire la maggiore percentuale possibile di energia incidente in fluorescenza immediata, minimizzando la fosforescenza e la fluorescenza ritardata.

La luce emessa dal cristallo deve essere poi convertita in un impulso di carica, per essere raccolta e analizzata da una catena elettronica di misura. A questo scopo si utilizza il tubo fotomoltiplicatore. In figura 2.2.50 è mostrata un'illustrazione schematica di uno scintillatore e un fotomoltiplicatore.

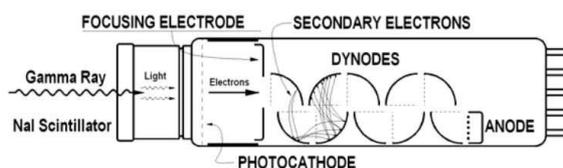


Figura 2.2.50: Schema di uno scintillatore abbinato ad un tubo fotomoltiplicatore.

La radiazione luminosa incide su un sottile strato di materiale fotosensibile, chiamato fotocathodo, che libera fotoelettroni, cioè elettroni emessi per effetto fotoelettrico. I fotoelettroni vengono poi focalizzati da un elettrodo verso lo stadio di moltiplicazione. Qui troviamo una serie di elettrodi, detti dinodi, ciascuno caricato ad un potenziale superiore al precedente. Il primo elettrone emesso per effetto fotoelettrico subisce una accelerazione a causa del campo elettrico e acquisisce energia cinetica. Quando l'elettrone colpisce il primo dinodo provoca l'emissione secondaria di altri elettroni. La struttura del sistema è progettata in modo che ciascun elettrone emesso da un elettrodo venga accelerato e provochi l'emissione di diversi elettroni dall'eletto-

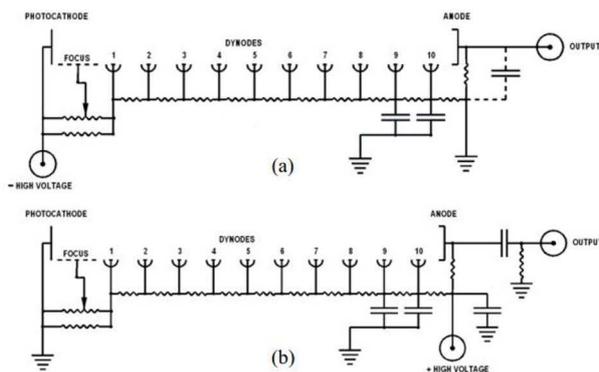


Figura 2.2.51: Schemi di partitore di tensione: a) con anodo a massa; b) con catodo a massa.

do successivo. Il processo di moltiplicazione continua, quindi, attraverso stadi successivi (circa dieci) e termina sull’anodo collettore. Per ottenere le varie differenze di potenziale si collega ogni dinodo a un partitore di tensione resistivo, come quelli schematizzati in figura 2.2.51.

Le cariche prodotte nell’interazione fotone-rivelatore vengono poi tramutate in un segnale di tensione da un amplificatore. Questo segnale di tensione è proporzionale all’energia depositata nel cristallo dal raggio gamma. L’amplificatore amplifica poi il segnale e lo forma opportunamente, in modo tale che possa essere convertito da analogico a digitale da un modulo ADC (Analogic to Digital Converter) e infine immagazzinato in uno dei canali dell’analizzatore multicanale MCA (Multi-Channel Analyser). Un MCA è uno strumento elettronico che può accettare un certo intervallo di tensione, che è diviso in un numero di incrementi, i canali. La tensione di ingresso viene misurata e quindi assegnata a un canale in base al suo valore, che sarà uguale o maggiore del valore iniziale del canale ma meno del suo valore iniziale più il valore incrementale. Il numero di impulsi assegnati ad ogni canale viene contato e registrato. Il numero di canali dell’MCA utilizzato per quest’esperienza è pari a 2048. L’MCA è infine interfacciato ad un PC che, tramite software, ci permette di acquisire i dati e visualizzare gli spettri. L’insieme degli impulsi registrati dall’analizzatore multicanale fornisce però lo spettro energetico in funzione dei canali, cioè di valori di tensione. Per calibrare in energia il sistema di rivelazione si usano sorgenti con transizioni ben definite e si identificano i canali relativi ai picchi corrispondenti. Il grafico Energia/Canali fornisce la taratura richiesta. Per quest’esperienza si è ricorso ad una calibrazione a tre punti utilizzando, oltre alla sorgente di Cesio-137, una sorgente di Cobalto-60 (^{60}Co) che emette due raggi gamma con energie di 1,17 MeV e 1,33 MeV. Lo schema di decadimento è mostrato in figura 2.2.52.

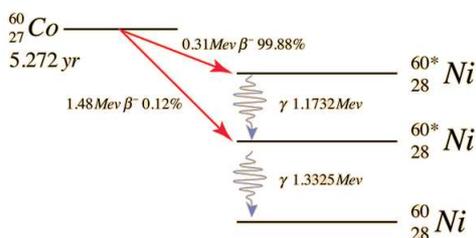


Figura 2.2.52: Schema di decadimento del Cobalto-60.

Il software permette di selezionare la gaussiana relativa ai fotopicchi e fornisce la FWHM (Full Width at Half Maximum) e la posizione, in termine di canali, del picco. Con questi valori

è stato eseguito un fit lineare da cui è stata ricavata la retta di calibrazione mostrata in figura 2.2.53.

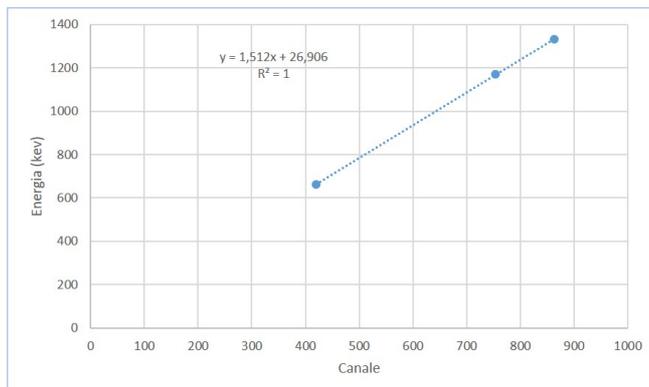


Figura 2.2.53: Retta di calibrazione Energia/Canali.

Le figure 2.2.54 e 2.2.55 mostrano gli spettri, calibrati in energia, relativi al Cesio-137 e al Cobalto-20, rispettivamente. In figura 2.2.56 è mostrato un momento dell'acquisizione dati in laboratorio.

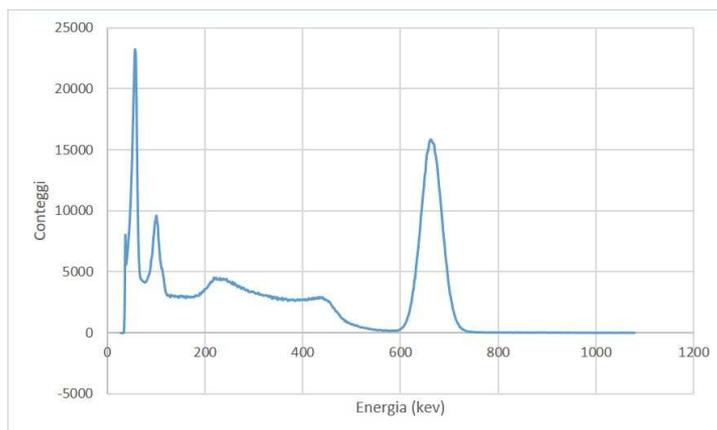


Figura 2.2.54: Spettro gamma del Cesio-137.

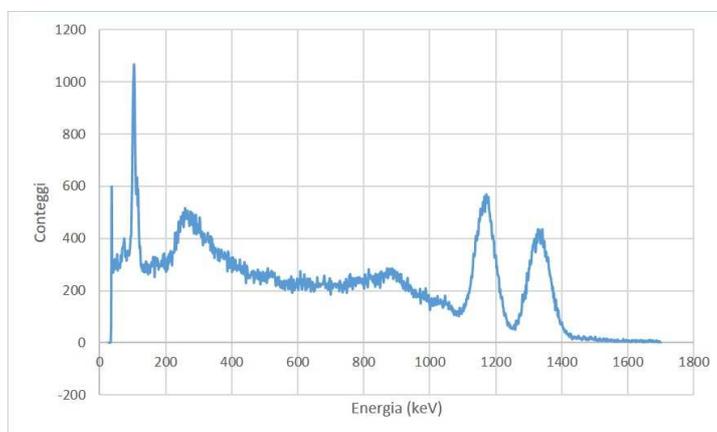


Figura 2.2.55: Spettro gamma del Cobalto-20.

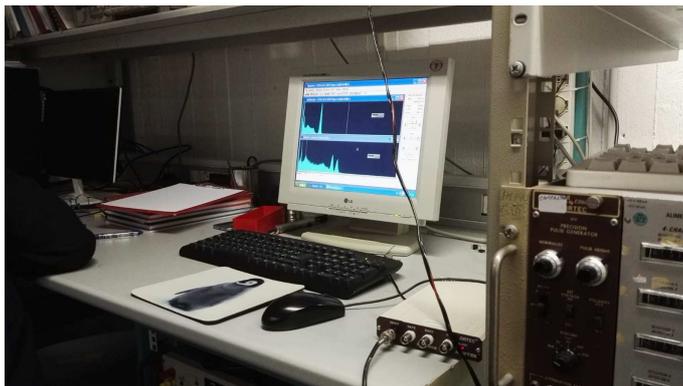


Figura 2.2.56: Acquisizione dati.

Quando si effettuano esperienze di spettroscopia bisogna tener conto del rumore dovuto alla radiazione di fondo, il cui segnale viene visualizzato in assenza di sorgenti. Esistono diversi tipi di sorgenti di radiazione che contribuiscono al fondo [39]. Tra di queste troviamo la radioattività naturale che può derivare dai materiali con cui è costruito lo stesso rivelatore e il restante apparato sperimentale, comprese le schermature, oppure dalla superficie terrestre, dalle mura del laboratorio e dalle strutture circostanti. Le radiazioni provenienti dai materiali da costruzione provengono da radionuclidi presenti in basse concentrazioni e sotto forma di impurità. Essi sono principalmente potassio, torio, uranio e radio. Oltre alla radioattività naturale, esistono i contributi al fondo originati dalla ricaduta atmosferica (fallout) di alcuni prodotti di fissione generati dai test di armi nucleari. Un considerevole contributo alla radiazione di fondo è dato dalla radioattività dell'aria, sia per la presenza di gas che di polvere. Il radon e il toron sono gas radioattivi a breve vita media, prodotti nelle catene di decadimento dell'uranio e del torio e presenti nel suolo e nei materiali da costruzione. Un ruolo importante nella formazione del segnale di fondo è svolto anche dall'interazione dei raggi cosmici con l'atmosfera terrestre. La radiazione cosmica primaria di provenienza galattica o solare è costituita da particelle cariche pesanti e da ioni pesanti di altissima energia. Interagendo con l'atmosfera, producono un gran numero di particelle secondarie le cui energie raggiungono alcune centinaia di MeV. Molte di queste radiazioni giungono al suolo e generano impulsi di fondo nei rivelatori. Una buona schermatura riduce le sorgenti di fondo, ma introduce la contaminazione dovuta alle strutture e allo stesso materiale di schermo. Il piombo risulta il materiale più largamente impiegato per le schermature a causa della sua elevata densità e l'alto numero atomico. In figura 2.2.57 è mostrato la schermatura con mattoni di piombo realizzata in laboratorio attorno al sistema di rivelazione.



Figura 2.2.57: Sistema di rivelazione schermato con mattoni in piombo.

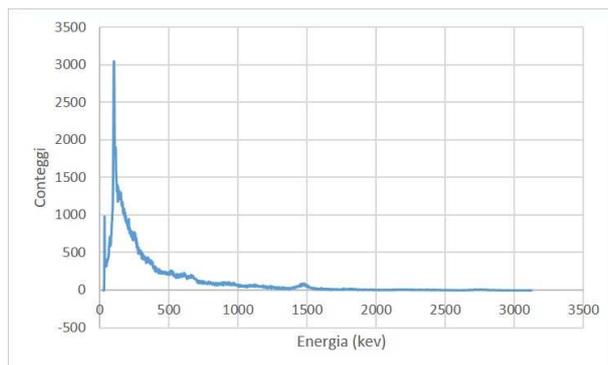


Figura 2.2.58: Segnale relativo alla radiazione di fondo.

In figura 2.2.58 è riportato il fondo acquisito in laboratorio.

Lo studio di uno spettro ci permette di capire a cosa sono dovuti i picchi che di volta in volta si presentano. Attraverso il software si ottiene la posizione in termini di canali e mediante la relazione di calibrazione si ricava l'energia corrispondente. Consultando le tavole apposite o specifiche pagine in rete⁷, si può risalire all'origine dei suddetti picchi. Il segnale della radiazione di fondo presenta un picco a 1480 keV che corrisponde al decadimento del Potassio-40 (^{40}K). Il Potassio-40 decade, infatti, emettendo un raggio gamma di energia pari a 1461 keV (la discrepanza sull'energia può essere dovuta al fatto che la calibrazione è stata eseguita con pochi punti). Si tratta di un radionuclide naturale primordiale e in quanto tale ha un tempo di dimezzamento confrontabile con la vita del pianeta pari a $1,3 \times 10^9$ anni. Abbiamo poi un picco corrispondente a 104 keV. Per quest'energia si presentano due possibilità, una relativa all'Europio da fallout e un'altra all'Attinio-228, che è un prodotto del decadimento del Torio-232, anch'esso radionuclide naturale primordiale. Lo spettro del Cesio-137, oltre a quest'ultimo picco, presenta un picco per un'energia pari a circa 55 keV che potrebbe corrispondere a un decadimento del Bario-133 per attivazione.

Infine è stata fatta una misura utilizzando ancora una volta la sorgente di Cesio-137, ma sostituendo il rivelatore con scintillatore di NaI con un sistema di rivelazione che impiegava uno scintillatore plastico. Come si può notare dalla figura 2.2.59, in questo caso il fenomeno dell'assorbimento fotoelettrico non si verifica e lo spettro non presenta il fotopicco.

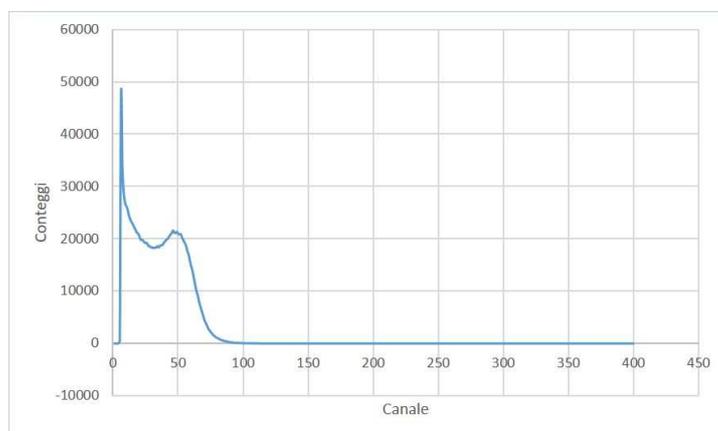


Figura 2.2.59: Spettro gamma del Cesio-137 acquisito mediante scintillatore plastico.

⁷<http://www.nucleide.org/Laraweb/index.php>

2.2.10 Radioattività

Un'esperienza di spettroscopia gamma, come quella descritta nella sezione precedente, consente sì di trattare sperimentalmente l'effetto Compton e, in generale, i vari fenomeni conseguenti l'interazione della radiazione con la materia, ma risulta didatticamente utile anche per aprire una discussione sulla radioattività e su come questo processo, identificato principalmente come rischioso per la salute, coinvolga molti oggetti che fanno parte della nostra quotidianità. Banane, avocado, mattoni in tufo, emettono radiazioni gamma che non sono pericolose, in quanto caratterizzate da piccole concentrazioni e tempi di dimezzamento molto grandi, e che possono essere rivelate attraverso tecniche spettroscopiche di questo tipo. Per facilitare la comprensione, è bene fornire alcuni concetti di base sul fenomeno e accompagnarli con attività didattiche.

In generale, con il termine radioattività [40] si indica un insieme di processi in seguito ai quali dei nuclei atomici instabili, *i radionuclidi*, si trasformano, *decadono*, nel nucleo di un altro elemento. Una prima storica classificazione contempla tre principali processi radioattivi, i quali si distinguono per il modo di decadimento:

- decadimento α , accompagnato dall'emissione di una particella α , una particella composta da due neutroni e due protoni;
- decadimento β , a sua volta distinto in decadimento β^- e β^+ a seconda che nel processo venga espulso un elettrone o un positrone;
- decadimento γ , accompagnato dall'emissione di un fotone di frequenza $\nu \geq 10^{20}$ Hz;

Tutti i processi avvengono secondo il principio di conservazione della massa-energia e, mentre i primi due comportano l'emissione di particelle cariche, nell'ultimo la particella emessa è neutra. A questi tre si sono in seguito aggiunti decadimenti con emissione di neutroni, di protoni e la fissione spontanea (scissione di un nucleo pesante in due nuclei più piccoli di massa confrontabile).

La legge che regola i processi di decadimento è una legge di tipo esponenziale decrescente. Se si indica con N_0 il numero di radionuclidi al tempo $t = 0$, il numero di nuclei sopravvissuti al tempo t è dato da

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.2.56)$$

Il tempo τ è detto *vita media* ed è una grandezza tipica di ogni radionuclide. Se definiamo il *tempo di dimezzamento* $T_{1/2}$ come il tempo necessario perché il numero di nuclei diventi la metà di quello iniziale, si ha

$$T_{1/2} = \tau \ln 2. \quad (2.2.57)$$

La (2.2.56) rappresenta quella che viene comunemente chiamata *curva di decadimento* mostrata in figura 2.2.60. La sua caratteristica è che a intervalli di tempo uguali corrisponde sempre lo stesso numero di nuclei che decadono. Chiaramente stiamo parlando di numeri di particelle, quindi di grandezze discrete, ma siccome sono quantità estremamente grandi, la funzione continua nella (2.2.56) ne rappresenta un'ottima approssimazione.

Una grandezza fondamentale nello studio dei fenomeni radioattivi è l'*attività*, cioè il numero di decadimenti nell'unità di tempo:

$$A(t) = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \frac{N(t)}{\tau}, \quad (2.2.58)$$

da cui, alla luce della (2.2.56), si ha:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.2.59)$$

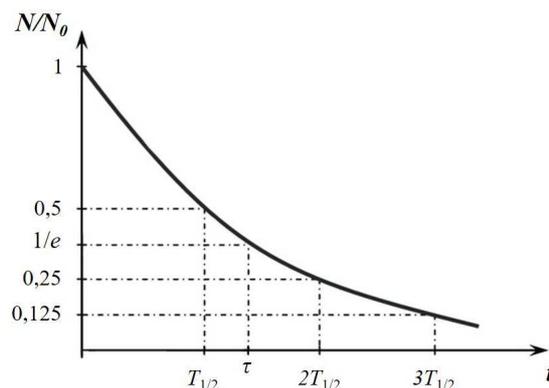


Figura 2.2.60: Legge del decadimento radioattivo.

Nel sistema internazionale la sua unità di misura è il becquerel (Bq) che equivale ad un decadimento al secondo, ma, poiché si tratta di una quantità troppo piccola, nella pratica si usa il curie (1 Ci = $3,7 \times 10^{10}$ Bq quantifica l'attività di 1 g di radio) e i suoi sottomultipli.

Adoperando un sensore di radiazione interfacciato al computer è possibile effettuare delle esperienze riguardanti i processi radioattivi. Il sensore rivela le particelle attraverso un tubo Geiger-Mueller. Quando una particella colpisce il tubo si accende una piccola luce lampeggiante e si sente un segnale sonoro. La radiazione viene misurata in conteggi in un intervallo di tempo, come configurato nel software di raccolta dati. La prima esperienza che abbiamo realizzato è stata quella di esplorare la radioattività dell'ambiente e di alcuni oggetti comuni e non (banane, mattoni, minerali, sorgenti radioattive). In seguito siamo andati ad investigare sul legame tra radiazione e distanza. Gli scienziati e gli esperti di medicina nucleare, sono soliti affermare che la migliore protezione dalle radiazioni è la distanza. In altre parole, per minimizzare l'esposizione alle radiazioni basta stare lontano dalla loro fonte. In effetti, se si pone un rivelatore ad una distanza r da una sorgente radioattiva (noi abbiamo utilizzato Cobalto-60), si trova che la quantità di radiazioni che lo colpiscono decresce come $1/r^2$. Tale circostanza viene facilmente verificata con il sensore di radiazione. Si posiziona il sensore davanti ad una scala millimetrata, si varia la distanza tra sensore e sorgente di volta in volta di 5 cm (da 5 a 35 cm) e per ogni distanza si acquisiscono i conteggi su 30 secondi. Il software restituisce il valore medio e la deviazione standard in ogni intervallo. Un fit curvilineo ci consente poi di studiare l'andamento dei conteggi in funzione della distanza. In figura 2.2.61 sono mostrati i dati sperimentali da noi ottenuti.

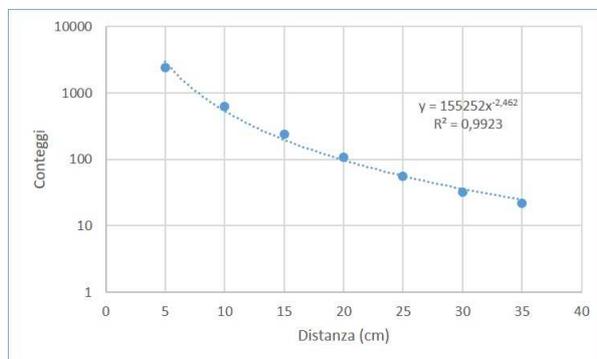


Figura 2.2.61: Misura sul legame tra radiazioni e distanza. Il grafico mostra l'andamento tra il numero di conteggi del rivelatore in funzione della distanza dalla sorgente.

Una misura importante per lo studio della radioattività è quella della vita media di un radionuclide, τ . Se il radionuclide in questione ha vita media breve (dell'ordine delle ore) si acquisiscono i conteggi su un tempo confrontabile, e questi avranno un andamento esponenziale decrescente. Facendo un fit curvilineo con scala lineare, dall'esponente della funzione si risale a τ . Se invece si utilizza una scala semilogaritmica, le misure si dispongono su una retta la cui pendenza sarà $-1/\tau$. Questo modo di misurare τ è adatto per radionuclidi con vite medie brevi tali che l'attività sia rilevante durante il tempo di misura. Per isotopi radioattivi con vite medie più lunghe, come il Cobalto-60 il cui tempo di dimezzamento è 5,272 anni, si esegue un diverso procedimento. Bisogna fare almeno tre misure a distanza di diversi mesi e da queste si ricostruisce la curva da cui poi si ricava τ .

Un'altra questione che può essere affrontata con il sensore di radiazione è quella dello schermaggio. Come discusso in precedenza, il materiale ideale per questo scopo è il piombo, soprattutto per i raggi gamma. La radiazione alfa e beta risulta molto più facilmente schermabile, la prima, ad esempio, con la carta, la seconda con il legno. Per quanto riguarda invece i raggi gamma, maggiore è la loro energia più risultano penetranti e maggiore deve essere lo spessore dello strato di piombo perché vengano assorbiti. Con il sensore si può studiare l'efficienza dello schermaggio offerto da materiali diversi con diverse sorgenti di radiazione, osservando come di volta in volta cambiano i conteggi.

Capitolo 3

La sperimentazione

La proposta di insegnamento descritta nel capitolo precedente è stata condivisa con gli insegnanti del corso di formazione tenuto all'Università degli Studi di Napoli Federico II dal professor Emilio Balzano.

Il corso conta circa trenta iscritti e, tra questi, sei insegnanti sono stati coinvolti nella sperimentazione: Milena Gentiluomo del Liceo Scientifico Adriano Tilgher di Ercolano, Ilaria Limoncelli del Liceo Scientifico "Filippo Silvestri" di Portici, Bianca Limoncelli dell'Istituto di Istruzione Superiore "Francesco Saverio Nitti" di Portici, Rosaria Camarda, Maria Loffredo e Annette Luogo del Liceo Scientifico "Carlo Urbani" di San Giorgio a Cremano.

Ben consci del fatto che l'obiettivo di sperimentare il percorso delineato nella sua interezza fosse a dir poco ambizioso, non abbiamo affrontato tutte le esperienze che fanno parte della proposta didattica e per quelle trattate non sempre si è andato nel dettaglio. In ogni caso, nel corso di quest'esperienza, ci siamo sempre sforzati di trasmettere un approccio allo studio della fisica che permettesse di guardare a fenomeni diversi con una visione unitaria.

La nostra proposta didattica sarebbe, in linea di principio, dedicata ad una stessa classe attraverso un percorso che inizi dal quarto anno fino ad arrivare all'introduzione della meccanica quantistica in quinta. Purtroppo, per le limitazioni dovute al tempo, quest'obiettivo va al di là delle possibilità di questo lavoro di tesi, e la sperimentazione è stata proposta a classi quarte e quinte. Il nostro auspicio è che le attuali classi quarte, intraprenderanno, in parte con il nostro aiuto, in parte autonomamente con la guida delle insegnanti, il percorso fatto con le quinte di quest'anno.

3.1 Il percorso sperimentato con le classi quarte

La sperimentazione dedicata alle quarte ha interessato un totale di sei classi appartenenti ai licei di Ercolano, Portici e San Giorgio a Cremano

Con le professoresse Gentiluomo e I. Limoncelli abbiamo lavorato su una parte della proposta e svolto attività in un unico incontro, della durata di tre ore circa, con la partecipazione di due classi per ciascuna insegnante.

I primi temi affrontati hanno riguardato i moti armonici. Abbiamo utilizzato molle e pesetti, pendoli e slinky e studiato la dipendenza del periodo del moto nei diversi casi. Ogni studente, munito di cronometro del proprio telefono cellulare è stato in grado di effettuare misure di questa grandezza. Quindi si è osservato come il periodo varia in funzione della costante elastica della molla, della massa del pesetto, della lunghezza del filo del pendolo e della massa del corpo sospeso. Per il sistema di molla pesetto sono state effettuate misure anche per le configurazioni di due molle in serie e in parallelo.

Abbiamo poi introdotto il fenomeno della risonanza ricorrendo a slinky, pendoli e diapason. Con le slinky abbiamo osservato che, cercando di accordare la spinta della mano che la mette in oscillazione con la frequenza propria del sistema, si ottiene come risultato un aumento dell'ampiezza di oscillazione. Ad una corda tesa tra due sedie, abbiamo poi appeso pendoli di varie lunghezze. I pendoli erano costituiti da bulloni attaccati a del filo di cotone. Mettendo in oscillazione uno di questi, se c'era tra gli altri un pendolo con la stessa lunghezza, allora questo si metteva ad oscillare, per risonanza. Con un diapason si è notato come il suo suono venisse amplificato quando questo si trovava sulla sua cassa armonica e come se ad esso si avvicinava un altro diapason identico quest'ultimo emettesse la sua nota, per risonanza.

Siamo poi passati alla distinzione tra onde trasversali e longitudinali con le slinky, semplicemente scuotendo su e giù la mano che teneva l'estremità di una slinky per le prime e stringendo con le dita un gruppo di spire e in seguito lasciandole andare per le seconde. La foto in figura 3.1.1 ritrae un momento dell'attività.



Figura 3.1.1: Utilizzo della slinky per distinguere tra onde trasversali e longitudinali.

Successivamente abbiamo introdotto il principio di sovrapposizione e le onde stazionarie con la corda elastica. Per quanto riguarda il principio di sovrapposizione, sono stati chiamati due ragazzi ad inviare contemporaneamente un impulso dalle due estremità della corda. Si è quindi cercato, dati i brevissimi tempi, di osservare o in ogni caso di presumere, cosa accadesse alla corda nel punto in cui i due impulsi si incontravano. Le onde stazionarie sono state invece realizzate chiedendo ad uno studente di interpretare la parte dell'ostacolo fisso, mentre all'altro estremo si faceva vibrare la corda in maniera tale da originare i modi normali. Si sono osservati nodi e ventri e si è messa in relazione la lunghezza d'onda dei modi normali con la lunghezza della corda. La corda elastica ci ha consentito, quindi, anche di introdurre il fenomeno della riflessione su un ostacolo fisso e di fare misure della velocità di propagazione di un impulso su di essa. Mentre due ragazzi tenevano i due estremi, variando di volta in volta la tensione, si misurava il tempo che un impulso impiegava a compiere tre o quattro viaggi di andata e ritorno. La corda utilizzata è una molla elicoidale con spire molto strette di metallo ed è uno degli oggetti che fanno parte del materiale didattico realizzato per le attività del PSSC¹. È particolarmente indicata per questo tipo di esperienze perché i ragazzi che la reggono sperimentano la forza con cui l'impulso agisce sulle loro mani. Il concetto di tensione come forza è stato illustrato attraverso l'uso di un dinamometro. La foto in figura 3.1.2 ritrae un momento della misura della velocità di un impulso sulla corda.

Una lunga parte dell'incontro è stata dedicata alle onde sonore studiate con un microfono interfacciato al computer. Una volta illustrato il principio di funzionamento dell'acquisizione

¹Il PSSC (Physical Science Study Committee) è stato un gruppo di ricerca formatosi nel 1956 su iniziativa di alcuni professori universitari di fisica del Massachusetts Institute of Technology di Boston. Il comitato, costituito da esperti provenienti da formazioni diverse (professori universitari, insegnanti di scuola secondaria, editori, tecnici di laboratorio, registi, grafici, esperti di produzione di testi) ebbe come scopo la produzione di una proposta straordinariamente innovativa per lo studio della fisica nella scuola secondaria superiore.



Figura 3.1.2: Misura della velocità di propagazione di un impulso sulla corda del PSSC.

e dell'elaborazione, abbiamo coinvolto gli studenti sulla registrazione di suoni e rumori, per approfondire poi le forme d'onda dei suoni vocalici prodotti dagli stessi studenti. Adoperando un proiettore, il relativo software ha permesso di visualizzare su un grande schermo la variazione di pressione in funzione del tempo (in realtà una differenza di potenziale in assenza di calibrazione). La foto in figura 3.1.3 ritrae un momento dell'attività.

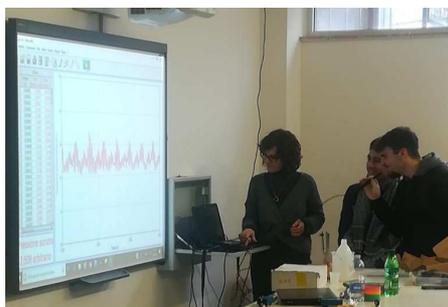


Figura 3.1.3: Registrazione di suoni vocalici.

Inizialmente sembrava che le forme d'onda fossero del tutto irregolari, ma pian piano che si registravano i diversi suoni, incominciavano ad emergere delle regolarità. Abbiamo, infatti, scoperto che i suoni vocalici, anche quando prodotti da persone diverse, hanno forme d'onda che si assomigliano. In figura 3.1.4 sono mostrati gli andamenti dei suoni di una "U" pronunciata da una ragazza e da un ragazzo, rispettivamente, mentre nelle figure 3.1.5 sono riportate le relative FFT.

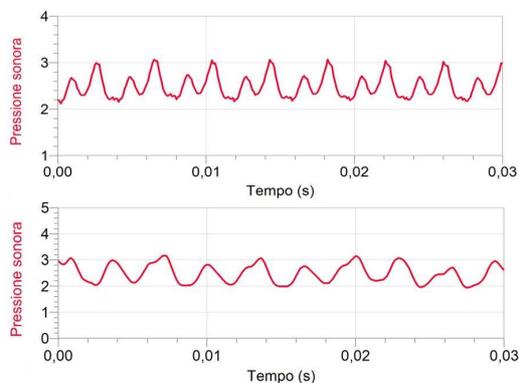


Figura 3.1.4: Registrazione di suoni vocalici: andamento di una "U" pronunciata da una ragazza (in alto) e da un ragazzo (in basso).

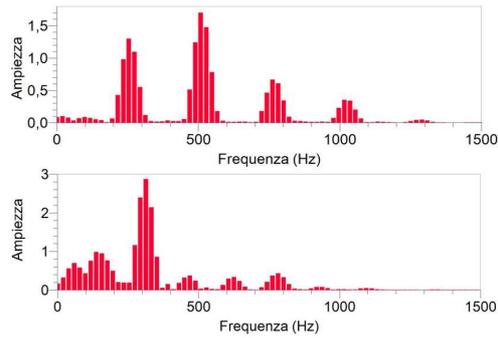


Figura 3.1.5: Registrazione di suoni vocalici: FFT relative alle "U" pronunciata da una ragazza (in alto) e da un ragazzo (in basso)..

Si vede che i due andamenti hanno delle caratteristiche comuni, e che le componenti significative sono concentrate nello stesso intervallo di frequenze.

Con i due diapason, uno dei quali con una piccola massa su uno dei rebbi, abbiamo visualizzato prima ciascuna forma d'onda separatamente e poi il fenomeno dei battimenti. Le forme d'onda sono mostrate nelle figure 3.1.6 e 3.1.7.

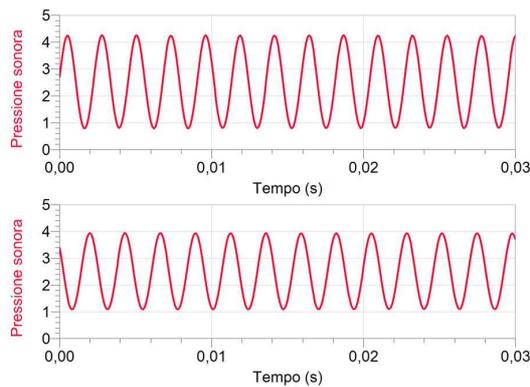


Figura 3.1.6: Forme d'onda relative al suono prodotto da due diapason di frequenza 440 Hz (in alto) e 430 Hz (in basso).

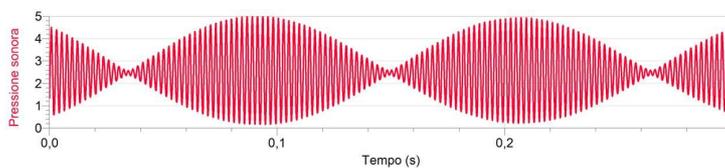


Figura 3.1.7: Battimenti: sovrapposizione dei suoni di due diapason di frequenza 440 Hz e 430 Hz.

Facendo la FFT della singola sinusoide abbiamo visto che la componente mostra un istogramma molto stretto (ecco perché il suono del diapason può essere considerato puro) centrato intorno ai 440 Hz per il diapason senza massa e intorno ai 430 Hz per quello con la massa. Per i battimenti le componenti sono naturalmente due (si vedano le figure 3.1.8 e 3.1.9).

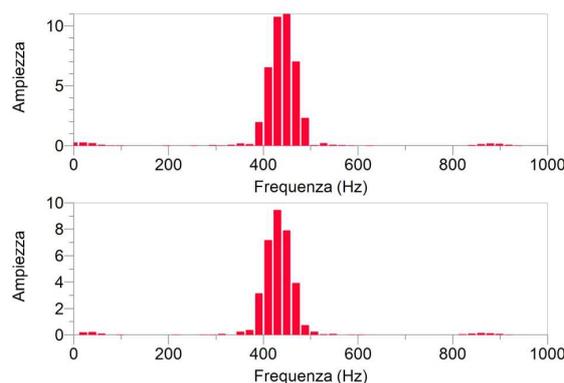


Figura 3.1.8: FFT relativa al suono prodotto da due diapason di frequenza 440 Hz (in alto) e 430 Hz (in basso).

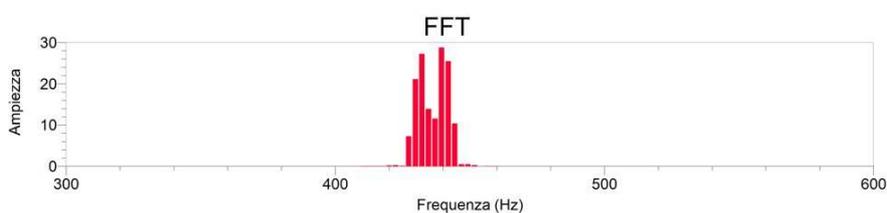


Figura 3.1.9: FFT relativa al suono prodotto dalla sovrapposizione di due diapason di frequenza 440 Hz e 430 Hz.

Per i battimenti, tra le altre cose, diventa controllabile anche l'aspetto matematico: le due funzioni seno si sommano con le formule di prostaferesi e il risultato è proprio quell'andamento caratteristico. Come esercizio è stato proposto agli studenti di ricostruire l'andamento attraverso l'utilizzo del foglio di calcolo. Attraverso il software abbiamo analizzato gli andamenti, misurato i periodi e quindi le frequenze di ciascuno, per singoli diapason e per la loro sovrapposizione, e infine messo in relazione tra loro queste grandezze. Il principale proposito di queste attività è stato quello di trasmettere il ruolo fondamentale del principio di sovrapposizione e come quanto sperimentato sia una sua conseguenza.

Per le ultime attività abbiamo, infine, utilizzato l'ondoscopio. Questo strumento è di grande utilità per lo studio delle onde e suscita sempre un enorme fascino sui ragazzi. Dopo averne descritto il funzionamento, abbiamo misurato l'ingrandimento dello strumento, la lunghezza d'onda al variare della frequenza, osservato il fenomeno della riflessione, della diffrazione e infine dell'interferenza, mettendo in evidenza come questo fosse conseguenza del principio di sovrapposizione. Una foto che ritrae un momento dell'impiego dell'ondoscopio è mostrata in figura 3.1.10.

La parte più sostanziosa del lavoro di sperimentazione è stata svolta, in incontri separati, con due classi quarte del Liceo Urbani, una della professoressa Camarda e una della professoressa Luongo. Le attività si sono svolte in due giornate impiegando in totale circa sette ore per ciascuna classe.

Per queste classi, la sperimentazione ha previsto un numero di attività superiore a quello delle attività negli altri licei e, in aggiunta a quanto precedentemente riportato, è stato svolto quanto segue.

Innanzitutto, i moti armonici sono stati trattati con un dettaglio maggiore. Abbiamo fatto misure di periodo di un sistema molla-carrellino messo in oscillazione in verticale, lungo un piano orizzontale e lungo un piano inclinato e dimostrato, quindi, che questa grandezza non

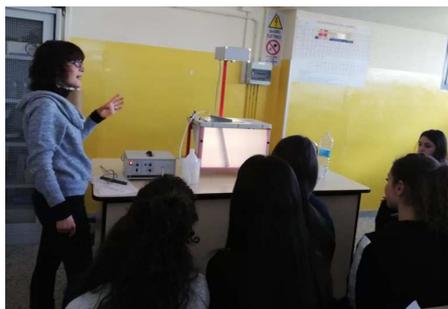


Figura 3.1.10: Sperimentazione con l'ondoscopio.

dipende dall'inclinazione del piano. Abbiamo, in seguito, fatto uso di un sonar interfacciato al computer, cosicché il relativo software permettesse di visualizzare la legge oraria e gli andamenti della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo. Come sistema da analizzare abbiamo scelto un pesetto collegato ad una molla. Per questi moti abbiamo poi introdotto lo strumento della simulazione numerica. È stata, quindi, illustrata la procedura del metodo di Eulero per il moto armonico semplice, per il moto armonico smorzato e per il moto armonico smorzato forzato, procedura che è stata in seguito implementata con il foglio di calcolo. In questo contesto, come con i grafici prodotti con il sonar, si è mostrata la correlazione tra gli andamenti della posizione, della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo.

Le ultime attività hanno riguardato lo studio dei sistemi di oscillatori accoppiati. Abbiamo impiegato dapprima due carrellini e tre molle e osservato il moto originato dallo spostamento di un solo carrellino. Da qui è scaturita una discussione sulla conservazione dell'energia e sul concetto di accoppiamento, concetto che è stato approfondito cambiando la molla centrale che collegava i due carrellini con molle di costante elastica diversa. Si è passato poi ad esaminare il moto ottenuto spostando i carrellini della stessa quantità nello stesso verso e in senso opposto: abbiamo generato i due modi normali del sistema. Aggiungendo un carrellino e una molla abbiamo analizzato un sistema di tre oscillatori accoppiati. In questo caso i modi normali sono tre e tra questi è facilmente visualizzabile quello in cui il carrellino centrale rimane fermo e i due laterali oscillano in opposizione di fase, basta spostare i due carrellini laterali della stessa quantità in versi opposti. Riguardo agli altri due modi normali, i due carrellini laterali oscillano sempre in fase, mentre quello centrale per un modo è in fase mentre per l'altro in opposizione di fase, ma per entrambi con una pulsazione minore rispetto ai carrellini laterali. Per questi due moti è più complicato ricreare le condizioni iniziali opportune e sono stati solo descritti. Si è poi insistito sull'importanza dei modi normali e su come il generico moto si ottenga come sovrapposizione di questi. Anche per i sistemi di oscillatori accoppiati è stato mostrato ai ragazzi il foglio di calcolo che implementa la procedura di Eulero e come si ottengono i modi normali imponendo le opportune condizioni iniziali. Una volta chiarito che la procedura può essere adoperata per un numero N qualunque di oscillatori, abbiamo analizzato il foglio di calcolo per $N = 14$ e commentato i risultati: quando il numero di oscillatori diventa sempre più grande, al limite infinito, il sistema descrive la propagazione di un'onda.

I sistemi di oscillatori accoppiati ci hanno consentito di sottolineare, ancora una volta, l'importanza del principio di sovrapposizione, anche da un punto di vista formale, con la scrittura delle equazioni dinamiche dei carrelli, cioè la risultante delle forze agenti su ciascuno di esso, le cui soluzioni sono modi normali o composizioni di essi.

Infine abbiamo descritto il funzionamento del pendolo di Newton, discusso di conservazione della quantità di moto e dell'energia, ed evidenziato come il sistema possa essere visto come un sistema di oscillatori accoppiati con una molla di costante elastica infinita.

3.2 Il percorso sperimentato con le classi quinte

Il percorso per le quinte ha coinvolto due classi, una della professoressa Camarda e una della professoressa Loffredo. Per queste classi, meno numerose, non è stato un problema accorparle e abbiamo fissato tre incontri, due a scuola e uno nel dipartimento di Fisica, per un totale di nove ore.

Il primo incontro è servito in buona parte a gettare le basi per introdurre le attività a loro dedicate e a richiamare gli argomenti, previsti per il percorso delle classi quarte, che comunque avevano affrontato nei loro studi passati. Abbiamo parlato quindi di moti armonici, del concetto di onda e di sistemi di oscillatori accoppiati, utilizzando il materiale didattico già impiegato per le quarte. Abbiamo avviato una discussione sulle onde elettromagnetiche, argomento che i ragazzi avevano appena finito di affrontare in classe con la loro insegnante, e sul fatto che l'equazione delle onde elettromagnetiche può essere ricavata dalle equazioni di Maxwell, equazioni che avevano studiato in forma integrale. Proprio a partire da queste ultime è stato immediato evidenziare la caratteristica fondamentale di queste onde per la quale un campo elettrico variabile genera un campo magnetico e viceversa. Discusse le proprietà delle onde elettromagnetiche abbiamo introdotto la classificazione in base alla loro frequenza commentando un'immagine dello spettro elettromagnetico e analizzando i vari tipi di radiazione. Tra queste abbiamo scelto le microonde per verificare alcune proprietà delle onde elettromagnetiche. Con il banco "ottico" con le microonde, abbiamo, infatti, studiato il fenomeno della riflessione, analizzato la polarizzazione della radiazione e osservato come questa interagisce con materiali diversi. Infine, dal momento che può essere fatto anche con questa strumentazione, abbiamo parlato del fenomeno dell'interferenza e quindi dell'esperimento della doppia fenditura e dei diversi casi che si verificano a seconda che si faccia uso di palline, dell'acqua e della radiazione elettromagnetica. Per introdurre l'esperimento con gli elettroni singoli abbiamo proiettato il video de "l'esperimento più bello" dell'Università di Bologna, per poi commentare il comportamento quantistico di queste particelle e la necessità di introdurre una funzione d'onda per descriverlo. Questa parte ha dato la possibilità di distinguere tra i due diversi meccanismi di formazione della figura di interferenza, nel caso elettromagnetico classico e in quello quantistico. Di conseguenza si è potuta sottolineare la sostanziale differenza tra probabilità classica e probabilità quantistica. Come le onde classiche precedentemente studiate, le funzioni d'onda obbediscono al principio di sovrapposizione, per cui una loro somma identifica ancora un stato quantistico, e, viceversa, un qualunque stato quantistico può essere sempre rappresentato da una combinazione di una o più funzioni d'onda distinte.

Il secondo incontro è stato dedicato alla struttura atomica e al significato di spettro e allo studio dell'effetto fotoelettrico, argomenti che gli studenti non avevano ancora trattato in classe. Con lo spettrometro interfacciato al computer abbiamo acquisito gli spettri continui di una lampadina e di una torcia davanti alla quale erano stati posizionati filtri di colore diverso e gli spettri discreti di una lampada al cadmio e di una al sodio.

L'effetto fotoelettrico è stato invece introdotto con il supporto dell'applet scaricabile dal sito dell'Università del Colorado, come mostrato in figura 3.2.1. La simulazione ci ha permesso di effettuare in maniera virtuale l'esperimento di Lenard e di osservare cosa accade variando tutti i parametri caratteristici: l'intensità della radiazione, la sua lunghezza d'onda e il valore della differenza di potenziale ai capi degli elettrodi. Abbiamo così scoperto l'esistenza di una frequenza di soglia e del potenziale di arresto. L'applet è risultata utile anche per illustrare la spiegazione di Einstein del fenomeno. È possibile infatti visualizzare la radiazione, piuttosto che come un fascio luminoso, come costituita da fotoni e abbiamo sperimentato che aumentando l'intensità della radiazione aumenta il numero di fotoni e quindi, se la frequenza supera il valore di soglia, il numero di fotoelettroni. Una volta analizzato l'andamento lineare dell'energia cinetica dei

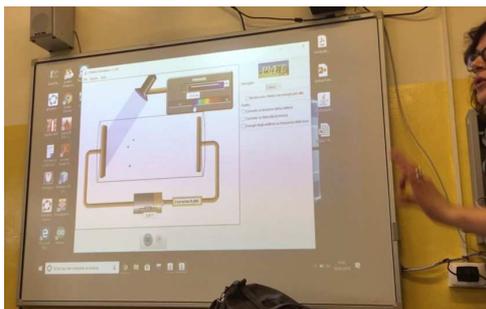


Figura 3.2.1: L'esperimento di Lenard spiegato utilizzando l'applet che ne simulava l'apparato sperimentale.

fotoelettroni in funzione della frequenza siamo passati alla misura della costante di Planck con l'apposita strumentazione. I ragazzi sono stati coinvolti direttamente nell'attività e invitati a maneggiare l'apparecchiatura per individuare il valore del potenziale d'arresto al variare del colore del led che illuminava il fotodiiodo. La foto in figura 3.2.2 ritrae un momento della misura.



Figura 3.2.2: Misura della costante di Planck.

I valori trovati sono stati inseriti nel foglio di calcolo, che nel frattempo era stato proiettato sullo schermo, e che ci ha fornito il valore della misura di h . L'esperienza ci ha permesso di discutere anche del metodo dei minimi quadrati e del significato di incertezza di una misura.

Spiegato il circuito di Lenard e l'origine della corrente, cioè la "migrazione" degli elettroni dal catodo all'anodo, abbiamo analizzato un semplice circuito RC per fare un confronto con ciò che accade tra le armature del condensatore e richiamare, quindi, la corrente di spostamento.

Per l'ultimo incontro le classi ci hanno raggiunto a Monte Sant'Angelo per attività in uno dei laboratori del dipartimento di Fisica. Abbiamo utilizzato la macchina di Wimshurst per produrre onde elettromagnetiche ed un rivelatore di campi elettrici e magnetici per rivelarle. Ancora una volta, così, abbiamo potuto sottolineare il fatto fondamentale che campo elettrico e campo magnetico si autogenerano e si autosostengono.

Un esperimento che avremmo potuto mostrare soltanto in dipartimento è quello della misura della carica specifica dell'elettrone. Per la sua riuscita infatti, si ha bisogno di un ambiente in cui viene realizzato il buio totale, poiché la luce emessa per diseccitazione dagli atomi del gas nell'ampolla è molto debole e in una stanza luminosa non sarebbe visibile, e nei locali scolastici non era una condizione semplice da verificare.

A questo punto del percorso abbiamo introdotto l'effetto Compton, dapprima raccontando l'esperimento storico del fisico statunitense e spiegando come il fenomeno fosse stato spiegato con semplici, "classiche", leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto, ma considerando le "nuove" teorie quantistiche e relativistiche. Nella spiegazione dell'esperimento

di spettroscopia gamma per l'osservazione della diffusione Compton, sono intervenuti il dottor Campajola e il dottor Casolaro che hanno illustrato la strumentazione, i risultati sperimentali, affrontato la questione della radiazione di fondo e dello schermaggio. Le foto in figura 3.2.3 e 3.2.4 in figura mostrano due momenti di questa parte del percorso.



Figura 3.2.3: Spiegazione dell'esperimento originale di Compton.



Figura 3.2.4: La diffusione Compton in un esperimento di spettroscopia gamma.

Dal momento che la sorgente di radiazione dell'esperimento è un campione di cesio radioattivo, abbiamo creduto necessario aprire una parentesi sulla radioattività e sulle leggi che la regolano. Abbiamo quindi distinto tra decadimento alfa, beta e gamma, commentato la legge del decadimento con il significato di tempo di dimezzamento e di vita media. Infine, utilizzando il sensore di radiazione interfacciato al computer, abbiamo verificato come gli effetti delle radiazioni diminuiscono con la distanza, con un andamento che va come l'inverso del quadrato di quest'ultima.

3.3 Ulteriori attività

La documentazione delle attività svolte durante la realizzazione di questo lavoro di tesi termina con il resoconto dell'incontro avvenuto con gli studenti delle professoressse Gentiluomo (due classi quarte) e B. Limoncelli (alcuni studenti del secondo anno) e che ha avuto luogo in uno dei laboratori del dipartimento di Fisica. La maggior parte dei temi toccati non fa, però, parte della proposta didattica argomento di questo lavoro di tesi. La prima esperienza sottoposta ai ragazzi è stata un'esperienza di elettrostatica: con una cannucchia sospesa ad un filo di cotone e strofinata con un tovagliolo, si è osservato il comportamento, attrattivo o repulsivo, nell'avvicinare oggetti di materiale diverso. Con batterie (da 4,5 V), lampadine di due tipi (uno di valore nominale di 3,5 V e 200 mA e l'altro 12 V e 165 mA) e cavi a coccodrillo abbiamo "giocato" con i circuiti

elettrici, lasciando inizialmente che i ragazzi capissero da soli cosa fare perché la lampadina si accendesse. Abbiamo poi discusso della legge di Ohm, dei principi di Kirchhoff, del concetto di energia, di potenza e chiesto ai ragazzi di realizzare un circuito con due lampadine poste prima in serie e poi in parallelo. In particolare, quando le due lampadine vengono messe in serie, accade che quella che si illuminava di più singolarmente, nella serie si illumina di meno e, viceversa, quella che prima era meno luminosa, posta in serie diventa più luminosa. La corrente che attraversa le due lampadine è la stessa. La caduta di tensione ai capi della lampadina inizialmente meno luminosa è, invece, maggiore, perché maggiore è la sua resistenza e, poiché la potenza è $P = V \cdot i$, la suddetta lampadina emetterà più luce. Lo studente alle prese con quest'esperienza rimane generalmente confuso dal risultato, che non è certamente intuitivo. Lo scopo dell'attività è quello di illustrare le leggi prima menzionate in maniera non convenzionale, sfruttando proprio lo stupore dei ragazzi per arrivare poi ad una comprensione profonda della teoria. L'incontro è terminato con una discussione sull'induzione elettrostatica e su quella elettromagnetica e sulla rivelazione di onde elettromagnetiche generate con la macchina di Wimshurst. Le foto in figura ritraggono alcuni momenti delle attività in laboratorio con i ragazzi.

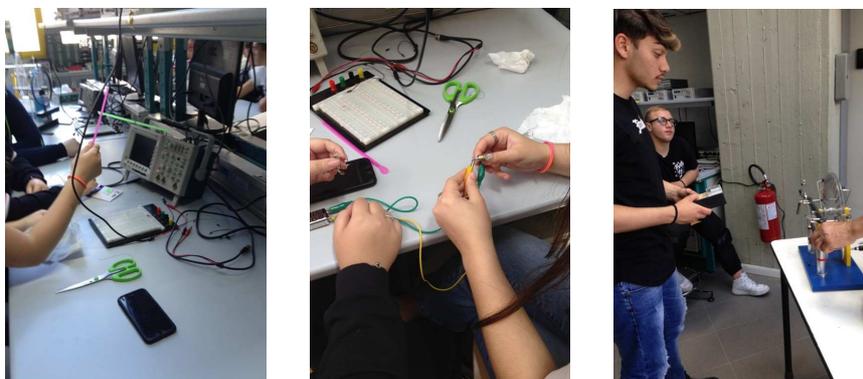


Figura 3.3.1: Elettrostatica con le cannucce (foto a sinistra). Circuiti con lampadine e batterie (foto centrale). Onde elettromagnetiche e macchina di Wimshurst (foto a destra).

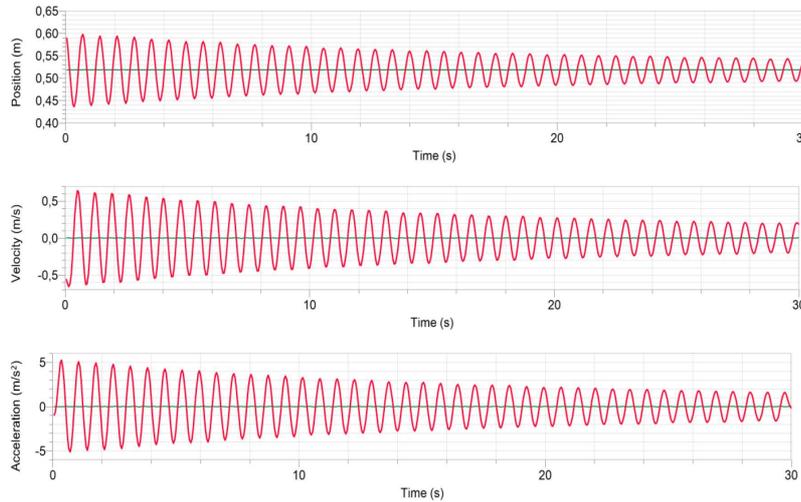
3.4 Valutazione

La sperimentazione della nostra proposta di insegnamento è terminata, sia con le classi quarte che con le quinte del liceo Urbani, con una fase di valutazione, non intesa come valutazione oggettiva e sommativa del lavoro degli studenti, ma piuttosto come stima della solidità e dell'efficacia del nostro intervento. Abbiamo quindi preparato del materiale che potesse rappresentare un quadro di riferimento per gli insegnanti, con l'intento di far emergere anche le difficoltà nell'adottare una proposta tanto articolata.

Per le quarte, alla fine del primo incontro abbiamo assegnato un lavoro da svolgere a casa in piccoli gruppi di due/tre persone, lasciando la possibilità di esprimersi come meglio credevano (presentazioni ppt, documenti di testo). La richiesta fatta ai ragazzi è stata sostanzialmente quella di raccontare le attività svolte insieme e di consultare alcune pagine online dove avrebbero trovato animazioni e simulazioni con cui lavorare e da commentare. Gli elaborati hanno mostrato che in linea di massima i concetti che volevamo passassero erano stati trasmessi, ma la cosa che ci ha colpito è che nessuno ha inserito un commento di alcun tipo sulle applet suggerite. È risultato evidente, allora, che le simulazioni, risorsa di indubbio valore, probabilmente non erano così intuitive come avevamo inizialmente creduto e vengono sfruttate al meglio soltanto se si possiede già una certa preparazione su ciò che si vuole osservare. C'è quindi bisogno di una guida perché vengano utilizzate al massimo delle loro potenzialità.

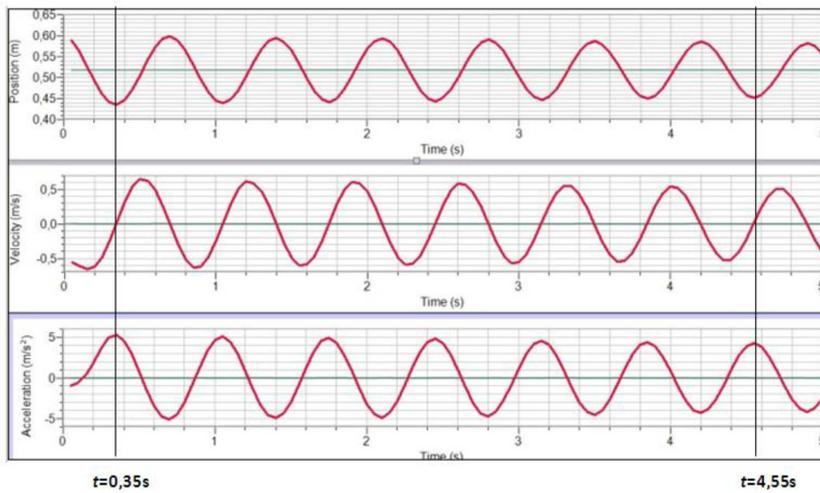
Una volta terminato il percorso, abbiamo preparato un questionario che le insegnanti hanno fatto svolgere come compito in classe. Il compito è riportato nel seguito.

1. In figura sono rappresentati i grafici di un oscillatore armonico smorzato, un sistema molla- pesetto, (con $K=10\text{N/m}$; $m=125\text{g}$) acquisiti con il sonar in tempo reale.
Misura sul grafico il decremento percentuale dell'ampiezza nell'intervallo 0-30s



Descrivi brevemente il sistema di acquisizione dati che abbiamo utilizzato e interpreta i grafici correlandoli.

Nella figura che segue sono riportati i grafici dello stesso oscillatore in un intervallo minore.



In questo intervallo di tempo possiamo trascurare lo smorzamento e trattare il sistema come un oscillatore armonico libero. Spiega e commenta i tre andamenti tra loro correlati.

Calcola periodo e frequenza e confronta i valori attesi con quelli che riesci a misurare sui grafici. Quale metodo hai utilizzato per la misura?

Individua le condizioni iniziali.

Quali sono le equazioni che descrivono i tre grafici?

$$X(t)=$$

$$V(t)=$$

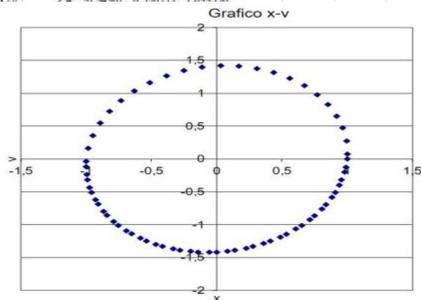
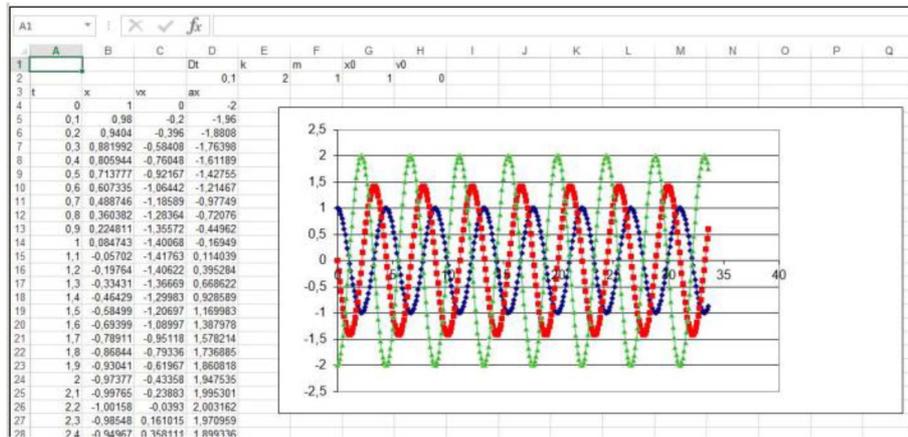
$$A(t)=$$

2. In figura è riportato il foglio elettronico con cui abbiamo realizzato la simulazione di un oscillatore avente $K=2N/m$; $m=1kg$ integrando l'equazione del moto con il metodo di Eulero..

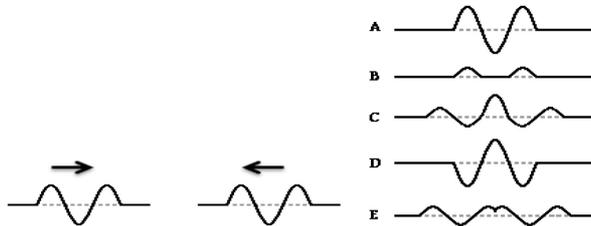
Individua nella finestra grafica i grafici della posizione della velocità e dell'accelerazione.

Descrivi il metodo di Eulero e le equazioni di ricorrenza che permettono di calcolare la legge della velocità e della posizione a partire dall'accelerazione. Descrivi il significato del grafico v-x.

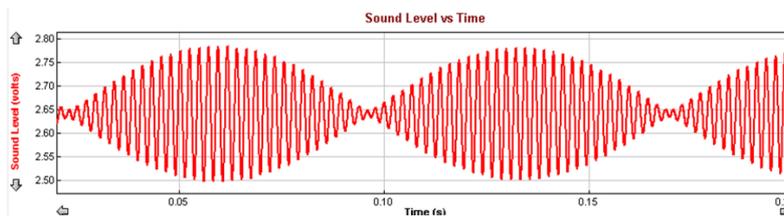
Cosa occorre fare per modificare il foglio per studiare l'oscillatore smorzato?



3. In figura sono rappresentate due onde uguali che viaggiano in senso opposto sulla stessa corda. Quale delle configurazioni da A ad E non potrà mai verificarsi? Spiega giustificando la tua scelta.

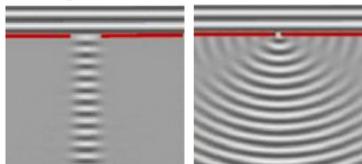


4. Abbiamo realizzato diversi esperimenti in laboratorio che sono stati interpretati con il principio di sovrapposizione. Elenca quelli che ricordi e descrivine alcuni. Cosa afferma il principio di sovrapposizione?

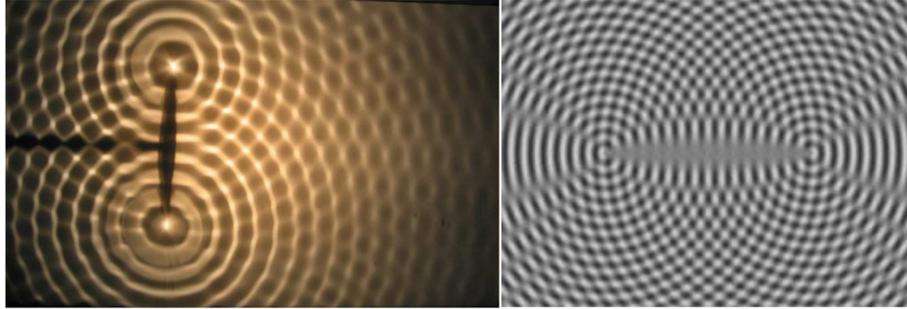


In figura è riportato il grafico dei battimenti che abbiamo realizzato in aula con due diapason che vibrano con moto armonico con frequenze molto vicine: $f_1=440\text{Hz}$ e $f_2=430\text{Hz}$. Descrivi il fenomeno. Traccia sul grafico la curva della modulazione di ampiezza del suono e indica la sua equazione.

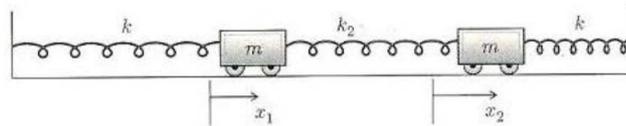
5. In figura sono riportate due immagini ottenute con l'ondoscopio per lo studio della diffrazione. Spiega come si interpretano le due immagini.



In figura sono riportate figure di interferenza che abbiamo ottenuto con l'ondoscopio. Descrivi il fenomeno. A cosa corrispondono le zone chiare e quelle scure? Qual è la condizione per avere interferenza costruttiva? Come sono raccordati i punti di interferenza costruttiva e distruttiva?



6. Con molle e carrellini abbiamo studiato il moto di due oscillatori accoppiati. Spiega cosa si intende per modo normale. Quanti modi normali ci sono nel nostro caso? Quali sono le condizioni per generarli? Quale relazione c'è tra un generico moto del carrellino e i modi normali?



Spiega come passare da un sistema di oscillatori accoppiati ad un'onda.

Ciascun quesito aveva l'obiettivo di mettere in luce determinate competenze su temi chiave del percorso didattico.

- **Quesito n. 1.** Riconoscimento dell'oscillatore armonico come modello. Lettura e correlazione tra grafici cinematici. Derivazione delle equazioni dai grafici riconoscendo il ruolo della pulsazione e della fase.
- **Quesito n. 2.** Utilizzo del foglio di calcolo per ricavare soluzioni numeriche. Correlazione tra grafici. Spazio delle fasi.
- **Quesito n. 3.** Principio di sovrapposizione attraverso una rappresentazione grafica.
- **Quesito n. 4.** Principio di sovrapposizione in generale e fenomeno dei battimenti come sua conseguenza.
- **Quesito n. 5.** Diffrazione e interferenza per le onde sulla superficie dell'acqua.
- **Quesito n. 6.** Modi normali con oscillatori accoppiati e passaggio al concetto di onda.

La consegna è stata vissuta con una certa difficoltà dai ragazzi, inizialmente spiazzati dalla modalità così diversa dai compiti in classe a cui erano abituati. In generale ciò che hanno trovato più complicata è stata la lettura dei grafici e la loro interpretazione per arrivare alle equazioni.

Noi, consapevoli fin da principio del grado di complessità degli argomenti, abbiamo creduto che la prova potesse rappresentare un punto di arrivo e che potesse servire, tra le altre cose, a capire quali temi dovessero essere approfonditi. Anche dal punto di vista delle insegnanti il lavoro ha richiesto un impegno particolare, ad esempio nello stabilire i criteri di valutazione, che hanno dovuto subire uno stravolgimento rispetto a quelli utilizzati per i compiti ordinari.

Di seguito riportiamo alcuni passaggi dei commenti degli studenti al percorso svolto con loro.

"[...] Solitamente studiare solo basandosi su libri senza avere la possibilità di osservare la teoria applicata alla pratica permette di farci solo un'idea di quanto è in realtà il tema trattato. Spesso capita che noi studenti studiamo solo per ottenere risultati, molte volte tentiamo anche di imparare con la memoria cose che realmente non abbiamo compreso e dimenticarle una volta dopo l'interrogazione. La nostra fortuna quest'anno è stata proprio questa, aver avuto l'opportunità di trattare l'argomento con calma, con esempi, spiegazioni approfondite e capire l'argomento realmente." (Eva, Flavia, Federica)

"Quest'anno abbiamo avuto la fortuna di lavorare con due fisici, il prof Balzano e Annarita. L'esperienza ci ha fatto comprendere argomenti apparentemente complessi. Abbiamo riflettuto e osservato grafici e ciò ci ha aiutato a capire meglio i fenomeni ondulatori. [...] abbiamo discusso e imparato a capire con i nostri stessi occhi che osservare il fenomeno risulti più efficace rispetto ad una normale lezione sui libri. [...] Alla fine abbiamo svolto un test, il quale, per alcuni, non ha dato buoni risultati, poiché diverso dal classico test di fisica. Crediamo che la parte importante sia stato il dopo test, infatti lì abbiamo riflettuto sui nostri errori e abbiamo capito confrontandoci con la nostra prof, da dove sono scaturite le nostre difficoltà. Un grande vantaggio di questa esperienza è stata quella di aver assimilato in modo naturale i fenomeni osservati. Per questo ringraziamo gli esperti Annarita e il professor Balzano, per aver accettato di aiutarci nel nostro percorso scolastico, affinché imparassimo a guardare con occhi diversi materie che possono risultare pesanti e complicate." (Giulia, Alessia, Adriana)

"Questa è stata un'ottima esperienza col fine di acquisire oltre le solite nozioni teoriche anche le competenze pratiche per effettuare esperimenti e misurazioni in ambito fisico. [...] Una difficoltà riscontrata è stata quella di organizzare il lavoro di approfondimento perché questo ha sovraccaricato il nostro studio quotidiano." (Vincenzo, Luca, Andrea)

"[...] Questa esperienza ci ha formato ed è stata un'iniziativa utile per tutti, ci ha insegnato tanto. È stata una bella sfida, ci siamo messi in gioco, abbiamo tentato un approccio totalmente nuovo alla materia. È bello saper di aver fatto parte di un progetto di tesi di laurea, è stato interessante e stimolante venire a contatto con il mondo universitario. Visto il feedback positivo saremo felici di continuare questo percorso anche il prossimo anno." (Gaia e Lorenza)

"Le lezioni effettuate nel laboratorio di fisica sono state senza ombra di dubbio molto interessanti. Nel programma da noi affrontato un argomento come le onde sarebbe risultato sicuramente di più difficile comprensione senza la possibilità di toccare con mano gli esperimenti che spiegano i fenomeni studiati. [...] Abbiamo trovato molto bello anche il poter partecipare ed apprezzare il lavoro di Annarita. Gli strumenti usati come l'ondoscopio inoltre non sono

facilmente reperibili. L'unica cosa che, a parer nostro, poteva essere usata meglio era Excel, un programma che viene usato prevalentemente in indirizzi come scienze applicate e che noi non avevamo mai usato e, per questo motivo, non sapevamo come funzionasse." (Francesco, Giuseppe)

"L'attività di laboratorio che abbiamo svolto sulle onde nel mese di febbraio è stata davvero una magnifica esperienza tant'è vero che:

- Noi alunni abbiamo avuto un ruolo più attivo rispetto alle normali lezioni frontali.
 - Abbiamo messo in pratica quanto appreso a livello teorico attraverso la sperimentazione che ci ha permesso di interiorizzare determinati concetti che ora non potremo più dimenticare.
 - Ci è servita per approcciarci con la fisica che poi andremo a studiare all'università: lo studio dei grafici, di programmi come Excel etc.
 - Siamo riusciti a ricavare molte leggi partendo dal fenomeno in sé.
- Allo stesso tempo però ci sarebbero alcuni punti su cui insistere:
- Fornire a priori una conoscenza base sul programma Excel per permettere a tutti i ragazzi di comprenderne a pieno il funzionamento.
 - Utilizzare un laboratorio più fornito e con le giuste attrezzature.
 - Vista la difficoltà riscontrata nello svolgimento dei compiti preparati dall'università, considerata l'introduzione della nuova tipologia di test, sarebbe opportuno esercitarsi durante l'arco dell'anno." (Camilla, Erika, Emanuela)

Oltre al punto di vista dei ragazzi, ci sembra fondamentale riportare le opinioni delle insegnanti, che nella relazione sull'esperienza si sono così espresse:

“Aspetti positivi: Tutti gli studenti hanno partecipato con entusiasmo a questo tipo di attività, mettendosi in gioco. Abbiamo avuto modo di verificare come questo tipo di attività abbia stimolato i più “fragili” e motivato maggiormente i più bravi ma soprattutto in entrambi ha favorito l'apprendimento in modo naturale trasformando nella maggior parte di loro le conoscenze acquisite in aula in vere e proprie competenze. Gli obiettivi che pensiamo essere stati raggiunti dai nostri alunni sono stati:

- favorire il lavoro di gruppo tra studenti, in modo da abituarli a collaborare in modo efficace, condividendo conoscenze e competenze e valorizzando le differenze;
- consolidare l'abitudine ad affrontare i vari argomenti in una prospettiva pluritematica, superando in particolare la divisione tra aspetti teorici e pratici;
- stimolare la progettazione e realizzazione di verifiche sperimentali anche con materiali poveri, che siano in grado di descrivere e spiegare la realtà che ci circonda;
- favorire l'acquisizione e l'uso consapevole dei moderni strumenti informatici;

Aspetti negativi: Per la maggior parte degli studenti il passaggio dagli oscillati accoppiati al concetto di onda non è stato affatto immediato. Infatti è stata necessaria una lezione supplementare per riflettere insieme e per puntualizzare quanto visto in laboratorio. Un'altra difficoltà è stata quella di tradurre in termini formali quello che avevano osservato. Infatti il formalismo ha creato non pochi problemi e questo è venuto fuori dalla verifica individuale sottoposta agli alunni. Per gli studenti del liceo tradizionale che non conoscevano l'uso di Excel è stato difficile comprendere e capire la costruzione dei grafici, il metodo di Eulero che ne è alla base dei grafici visti e per questo è stata necessaria una lezione supplementare, ma secondo noi non sufficiente per innescare in loro la curiosità di approfondimento di questo fondamentale programma di calcolo. Infatti ci siamo proposte di utilizzare questo strumento in ambito matematico in futuro per farlo conoscere in modo più adeguato. Tale difficoltà non è stata riscontrata negli alunni delle Scienze Applicate perché abituati a lavorare con questo programma. Una grandissima difficoltà di noi docenti è stata legata ai criteri di valutazione di questa esperienza, soprattutto quelli relativi alla verifica finale. Bisogna cambiare il nostro modo di valutare poiché quello tradizionale legato al compito standard non è stato possibile applicarlo e quindi la valutazione non solo delle conoscenze ma soprattutto delle competenze ha bisogno di un registro diverso basato su indicatori e descrittori da declinare in maniera opportuna. Un'altra difficoltà è stata quella del tempo utilizzato per tale percorso. Abbiamo stimato circa 10 ore quindi tre settimane. Ci rendiamo conto che quanto acquisito dai nostri studenti non sarà sicuramente dimenticato ma entrambe abbiamo dovuto scegliere di tralasciare alcuni argomenti del quarto anno e spostare la loro trattazione il prossimo anno. Questo tipo di approccio aiuta la comprensione ma tralascia la parte applicativa necessaria per affrontare l'esame di Stato. Quindi una proposta è quella di integrare il

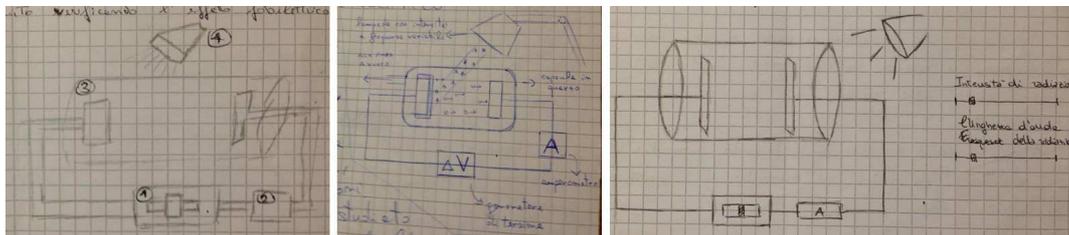
percorso con problemi legati all' applicazione di quanto sperimentato, utilizzando i dati presi e formulando situazioni problematiche che possano mettere in gioco le competenze acquisite."

Dal momento che il percorso con le classi quinte si è articolato in un periodo di tempo più breve rispetto a quello con le quarte e più a ridosso della fine dell'anno con l'esame di maturità alle porte, e in relazione al fatto che i ragazzi erano impegnati in diverse attività che già toglievano molto tempo alla normale attività disciplinare (tra di queste l'alternanza scuola-lavoro), la fase di valutazione è stata strutturata in maniera diversa. Durante il secondo incontro avevamo deciso di introdurre l'effetto fotoelettrico utilizzando l'applet descritta nel capitolo precedente. Alla luce delle conclusioni tratte durante il percorso con le quarte, la simulazione è stata sfruttata come strumento di supporto per spiegare un argomento complesso, senza pretendere che gli studenti arrivassero autonomamente a delle conclusioni. Per testare l'efficacia dell'intervento abbiamo chiesto alle insegnanti di assegnare ai ragazzi una breve relazione sull'esperienza.

RELAZIONE SULL'EFFETTO FOTOELETTRICO

- In laboratorio abbiamo lavorato con l'effetto fotoelettrico utilizzando una simulazione e realizzando una misura della costante di Planck con un apparato sperimentale.
 Descrivi l'attività che abbiamo svolto facendo riferimento al fenomeno e alle variabili in gioco:
 - aiutandoti anche con una figura schematica, ricorda l'insieme di operazioni che abbiamo realizzato nel laboratorio virtuale per lavorare con caratteristiche diverse di materiali e radiazioni luminose;
 - ricostruisci la procedura che ci ha consentito di misurare la costante di Planck con l'apparato sperimentale.
- Esprimi un giudizio sul modo in cui il fenomeno è stato trattato.

In generale, è emerso, nonostante l'argomento non fosse stato precedentemente studiato, che i punti principali erano stati colti. Di seguito alcune immagini tratte dalle relazioni dei ragazzi.



b) In conclusione ritengo che l'approccio all'effetto fotoelettrico e all'introduzione alla fisica quantistica sia stata non solo adeguatamente presentata e semplificata, ma è stata assolutamente rendendo facile, ma che sia stato anche reso interessante e comprensibile grazie alle spiegazioni interessanti e a lunghi tratti anche leggeri dei due professori, i quali si sono mostrati estremamente concettuali sia ~~nel~~ per quanto riguarda l'aspetto metodologico costruttivo sia, cosa secondo me di grande valore, sotto l'aspetto dialettico e umano, permettendo un'interazione attiva da buona parte dei partecipanti alla lezione.

b) Ritengo che la simulazione ^{virtuale} de ~~mi~~ sfruttata durante l'intervento sia stata molto efficace nel farci comprendere pienamente l'effetto fotoelettrico e mi ha molto colpito il modo con cui abbiamo trovato per ogni led colorato un determinato valore del potenziale d'arresto attraverso uno strumento che non avevo mai visto prima. Inoltre, ~~ed~~ ^{ed} ~~effettivamente~~ ^{ed} l'apprendimento è risultato molto più semplice ^{ed} ~~grazie al~~ ^{grazie al} ~~lavoro~~ ^{lavoro} della lezione, reso leggero ^{grazie} ~~ad~~ ^{ad} ~~metodi~~ ^{metodi} d'impegno dei docenti (simpatissimi mi!).

b) Personalmente ritengo che questo fenomeno sia stato ~~trattato~~ ^{trattato} nel modo più vicino a noi studenti.
~~Essa~~ ^{Essa} Non avrebbe mai studiato a scuola, mi pareva di non poterla comprendere completamente, invece il mio ~~libro~~ ^{libro} delle LII per renderlo l'esperimento più reale e le spiegazioni ~~sono~~ ^{sono} ~~con~~ ^{con} grafici hanno reso il fenomeno più semplice ~~da~~ ^{da} ~~comprendere~~ ^{comprendere}.
 Anche l'inclusione di noi studenti nelle spiegazioni tramite la nostra partecipazione sia nelle ~~nel~~ ^{nel} ~~man~~ ^{man} dell'apparato sperimentale sia nella ripetizione dei contenuti precedentemente sposti hanno facilitato ~~il~~ ^{il} ~~assorbimento~~ ^{assorbimento} delle conoscenze.

Alla fine della sperimentazione abbiamo scelto di intervistare quattro ragazzi tra quelli che si erano mostrati particolarmente motivati. In realtà più che un'intervista, il nostro intento è stato quello di mettere in piedi un gruppo di discussione, dando ai ragazzi la libertà di esprimersi, per cercare di constatare quante cose ricordassero del percorso, chiedendo loro di parlare di argomenti ed esperimenti al di fuori di un contesto di valutazione, come può essere un compito in classe o un'interrogazione. Ciò che ci ha colpito è stato non tanto la preparazione dei ragazzi, del resto erano tra quelli più brillanti e lo sarebbero stati con o senza il nostro intervento, bensì il fatto che avessero colto il nostro approccio, raccontando esperimenti e fenomeni non in maniera libresca e mostrando che era rimasta una traccia del nostro modo di proporre le cose. Inizialmente hanno raccontato ciò che era rimasto loro più impresso. In generale hanno apprezzato l'approccio diverso dalla lezione frontale con l'utilizzo "di strumenti e oggetti per esperimenti pratici", l'interattività, il fatto che ci si focalizzasse sul "senso di un certo fenomeno e non sulle formule". Tutti sono stati entusiasti dell'uso dell'applet per lo studio dell'effetto fotoelettrico e ne hanno riconosciuto l'utilità per la comprensione del fenomeno, che "non verrà facilmente dimenticato, anche senza averlo studiato dal libro". Proprio in merito all'effetto fotoelettrico, argomento che non era stato introdotto dall'insegnante prima del nostro intervento, abbiamo chiesto ai ragazzi di raccontare nel dettaglio l'esperienza. La descrizione è stata data in modo fluido e con proprietà di linguaggio da tutti i partecipanti che hanno fatto esplicito riferimento al funzionamento della simulazione con le sue animazioni e all'utilizzo combinato dell'apparato di misura. Sono emersi diversi aspetti interessanti. In primo luogo, ci siamo accorti che la visualizzazione dinamica con la possibilità di far variare le grandezze in gioco (intensità, lunghezza d'onda, frequenza) ha permesso di cogliere il significato di potenziale d'arresto e di frequenza di soglia e di comprendere cosa accade al variare di ogni grandezza ("quando la frequenza era maggiore di un certo valore, se aumentavamo l'intensità, aumentavano i fotoni e anche gli elettroni"). In qualche modo la simulazione ha conferito, poi, una certa trasparenza alla misurazione della costante di Plank. Nonostante in questa fase tutti i costituenti dell'apparato sperimentale fossero all'interno di una scatola, senza la possibilità di essere visti, nella descrizione dell'esperimento hanno fatto esplicito riferimento ai diversi componenti (catodo, anodo, ecc.). Questa necessità di dare forma al processo di misura si è tra l'altro manifestata con uno schema prodotto da una ragazza che ha commentato e ricostruito le operazioni e i risultati ottenuti. Infine, la lettura successiva del fenomeno sul libro di testo è risultata molto più efficace grazie alla possibilità di dare significato al formalismo e di ricostruire mentalmente, appoggiandosi alle immagini animate dell'applet, il significato degli schemi proposti dal testo.

In seguito, invogliati a parlare di altri argomenti che non erano venuti fuori nella prima parte della discussione (sui modi normali, sulla misura di e/m , dell'effetto Compton), hanno dimostrato di aver interiorizzato i punti focali delle varie attività.

Ci interessava poi sentire la voce dei ragazzi su come, secondo la loro opinione ed esperienza, si potesse migliorare il modo di fare scienza a scuola e su quali fossero le difficoltà nell'implementare un approccio che parta dalla fenomenologia per interpretare il modello teorico. Siamo rimasti molto colpiti da quanto la risposta sia stata centrata: "Non è facile per noi farlo in quinta, senza averci lavorato in passato. Sarebbe stato diverso se ci avessero abituato fin dalla prima".

Infine, anche se non direttamente collegata al nostro percorso didattico, è venuta fuori una critica molto forte al sistema scolastico, sostenuta in particolare da una ragazza, ma condivisa dagli altri: gli insegnanti tendono in generale a curare "le eccellenze", quegli studenti particolarmente dotati, che, senza dubbio, proprio forti del loro talento, riuscirebbero negli studi anche senza attenzioni speciali, trascurando spesso le necessità degli altri studenti.

Conclusioni

L'insegnamento della fisica moderna all'ultimo anno del liceo richiede una profonda rivisitazione su come insegnare la fisica su tutti e cinque gli anni del percorso di studi. Bisogna individuare quegli aspetti che saranno fondamentali e avviare riflessioni su di essi già dai primi anni. Si pensi, ad esempio al passaggio dal discreto al continuo o al significato di probabilità nel caso della meccanica quantistica, oppure al concetto di invarianza per quanto riguarda la relatività.

Nell'insegnamento della fisica, ed in particolare per arrivare all'insegnamento della meccanica quantistica, di cui questo lavoro di tesi si è occupato, bisogna prestare attenzione alla costruzione di modelli, all'utilizzo di sistemi di calcolo e all'adozione di categorie molto potenti che consentono di generalizzare e quindi passare da una teoria ad un'altra.

La ricerca in didattica della fisica negli ultimi anni si è prodotta in numerose proposte dalle quali emergono diverse soluzioni che non sembrano del tutto ragionevoli e che soprattutto non si muovono verso la direzione appena descritta. Oltretutto spesso accade che l'impatto di questi lavori nella pratica risulti relativamente scarso poiché non sempre alla ricerca è accompagnata la fase di sperimentazione.

Una certa ragionevolezza sembra mancare anche nella struttura dei libri di testo adottati nelle scuole. Sfolgiandone uno, ci si accorge che c'è la tendenza a trattare tutti gli argomenti attribuendo a ciascuno lo stesso peso. Si arriva, così, ad affrontare anche temi esotici dando a questi la stessa importanza richiesta da quei concetti centrali, quei nuclei fondanti alla base di una comprensione profonda.

Nel costruire la nostra proposta, nata nell'ambito di un corso di formazione per gli insegnanti, ci siamo posti il problema di come potesse essere inserita in un progetto più ampio, che coinvolgesse gli insegnanti fin dall'inizio e, soprattutto, che non risultasse un pacchetto preconfezionato, ma fosse contraddistinta da una certa flessibilità.

Per stimare la solidità delle nostre idee, la proposta, anche se non nella sua totalità, è stata sperimentata con classi quarte e quinte di liceo scientifico. La sperimentazione dell'intero percorso avrebbe richiesto troppo tempo e costituisce un obiettivo a cui giungere con progressività nel corso degli anni. Alla fine del percorso è stata effettuata una valutazione mirata non a valutare il lavoro degli studenti, ma a capire quanto la nostra idea di insegnare la fisica potesse funzionare. La risposta dei ragazzi, rilevata attraverso questionari, relazioni e discussioni aperte ci ha restituito una certa fiducia sull'efficacia del nostro intervento. Seppur vero che da un lato ci è sembrato che la proposta ideata abbia dato risultati positivi, dall'altro bisogna ammettere che ci siamo mossi su di un territorio controllato, in una situazione in cui siamo intervenuti a sostegno del lavoro degli insegnanti. A loro volta, le insegnanti coinvolte, in particolar modo le professoressa del liceo scientifico Urbani, con le quali abbiamo svolto la parte più rilevante della sperimentazione, hanno fatto sì che anche noi imparassimo molto da questa esperienza. Se le cose hanno funzionato è in larga parte merito loro che hanno lavorato sul materiale che abbiamo prodotto e accolto tutti i nostri stimoli. Abbiamo trovato un ambiente particolarmente recettivo e non ci illudiamo, dunque, di aver dato vita ad una proposta didattica dall'efficacia garantita, ma crediamo che possa risultare un lavoro organico, coerente e facilmente adattabile a contesti

diversi.

Ci chiediamo, però, se si può rendere sostenibile una proposta di questo tipo senza un rapporto continuo tra il mondo della scuola e quello della ricerca. Gli insegnanti possono arrivare con gradualità a mettere autonomamente in campo una proposta di questo tipo, ma solo se alle spalle esiste un lavoro di collaborazione con i ricercatori in didattica della fisica. Questa collaborazione dovrebbe manifestarsi non tanto in corsi di formazione che spesso diventano un addestramento allo svolgimento di esperienze, ma piuttosto in un impegno a fornire agli insegnanti un supporto reale nel momento in cui implementano le attività. Spesso le scuole sono lasciate sole e senza l'aiuto dei centri di ricerca difficilmente riescono a progettare esperienze e proposte didattiche. La costruzione di una proposta d'insegnamento presuppone una visione di tipo epistemologico, un'analisi dei fatti storici, una certa esperienza nella ricerca nella didattica della fisica e solitamente non avviene in un ambito scolastico. Le difficoltà aumentano se si considera l'alto numero di laureati in matematica che insegnano la fisica. Lunghi dall'esser considerato un fatto negativo, questa circostanza richiede comunque uno sforzo considerevole per questi insegnanti che non hanno affrontato certi temi nel loro percorso di studi universitario. A tutto ciò si aggiunge la cronica mancanza nelle scuole di risorse, materiali e laboratori scientifici.

Per tutti questi motivi siamo convinti di quanto sia necessaria la ricerca in didattica della fisica e di come i suoi risultati possano costituire una risorsa di inestimabile valore, in modo particolare quando si vogliono insegnare argomenti di fisica moderna nella scuola secondaria superiore.

Bibliografia

- [1] R. Duit, H. Schecker, D. Höttecke, H. Niedderer, *Teaching physics*, in *Handbook of Research on Science Education*, ed. N.G. Lederman & S.K. Abell, Routledge, New York, 434–456 (2014).
- [2] U. Besson, M. Maligneri, *Insegnare la fisica moderna*, Carrocci Editore, Roma (2018).
- [3] G. C. Ghirardi, R. Grassi, M. Michelini, *Introduzione delle idee della fisica quantistica e il ruolo del principio di sovrapposizione lineare*, *La Fisica nella Scuola*, XXX, 3 Sup., Q7, 46-57 (1997).
- [4] M. Michelini, A. Stefanel, *Avvicinarsi alla Fisica Quantistica, una proposta didattica*, Udine: Forum (2004).
- [5] M. Michelini, A. Stefanel, *Dall'esplorazione con polaroid al formalismo della meccanica quantistica. Schede studente e questionario*, in *Proposte didattiche sulla fisica moderna, Strumenti per una didattica laboratoriale*, M. Michelini ed., Università di Udine, MIUR-PLS-UniUD, Udine, 233-278 (2010).
- [6] O. Levrini, P. Fantini, *Encountering productive forms of complexity in learning modern Physics*, *Sci. Educ.* 22, 1895-1910 (2013).
- [7] E. Fabri, *La Fisica Quantistica nella Scuola Secondaria: proposte e problemi*, Atti del VI Convegno del GNDF, 99 (1988).
- [8] E. Fabri, *Come introdurre la fisica quantistica nella scuola secondaria superiore*, Pisa (1994).
- [9] E. Fabri, *Introduzione alla fisica quantistica*, Pisa (1999).
- [10] U. AMALDI, *La Fisica per i licei scientifici 3*, Quarta Edizione, Zanichelli, Bologna (1999).
- [11] H. Everett, *The Theory of the Universal Wave Function*, in *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, B. DeWitt & N. Graham ed., Princeton University Press (1973).
- [12] L.E. Ballentine, *The statistical interpretation of quantum mechanics*, *Rev. Mod. Phys.*, 42(4):358–381 (1970).
- [13] S. Weinberg, *Dreams of a Final Theory*, Pantheon, New York, 53–54 (1992).
- [14] R. Penrose, *Gravity and State Vector Reduction*, in *Quantum Concepts in Space and Time*, R. Penrose & C. J. Isham ed., Oxford University Press, 129-146 (1986).
- [15] R. Figari, *Interpretazioni e didattica della Meccanica Quantistica*, "I Lincei per la Scuola", Polo di Latina (2018) http://www.memocsevents.eu/wordpress/lincei/lincei_figari.pdf.

- [16] A. B. Arons, *Guida all'insegnamento della fisica*, Zanichelli, Bologna (1992).
- [17] S. Rosati, *Fisica Generale I*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano (1978).
- [18] C. Mencuccini, V. Silvestrini, *Fisica I. Meccanica-Termodinamica*, Liguri Editore, Napoli (1998).
- [19] AA.VV., *Fisica a cura del PSSC (Comitato per lo studio della Scienza Fisica)*, Zanichelli, Bologna (1995).
- [20] Fisica Onde Musica, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, <http://www.fisicaondemusica.unimore.it/>.
- [21] C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, *La Fisica di Berkeley. Meccanica*, Zanichelli, Bologna (1970).
- [22] F. Dalfovo, *Percorso di approfondimento in fisica. Oscillatori accoppiati e caos*, Università di Trento (2018).
- [23] P. G. Merli, G. F. Missiroli, G. Pozzi, *On the statistical aspect of electron interference phenomena*, American Journal of Physics 44, 306 (1976).
- [24] R. Feynman et al., *The Feynman Lectures of Physics Volume III. Quantum Mechanics*, California Institute of Technology (1965).
- [25] J. S. Bell, *Dicibile e Indicibile in Meccanica Quantistica*, Adelphi, Milano (2010).
- [26] R. Gilmor, *Alice nel paese dei quanti. Le avventure della fisica*, Raffaello Cortina Editore, Milano (1996).
- [27] E. Balzano, E. D'Ambrosio, R. Figari, *An algorithm-based introduction to the evolution of physical systems* (2017).
- [28] A. Merinio, *Progetto didattico di introduzione alla Meccanica Quantistica*, Tesi di Laurea in Fisica, Università degli Studi di Napoli Federico II, a.a. 2006-2007.
- [29] A. Einstein, *Investigation on the Theory of the Brownian Movement*, Dover Publication (1956).
- [30] E. D'Ambrosio, *Proposta didattica per l'insegnamento della Meccanica Quantistica nella scuola secondaria superiore*, Tesi di Laurea in Fisica, Università degli Studi di Napoli Federico II, a.a. 2014-2015.
- [31] C. Mencuccini, V. Silvestrini, *Fisica II. Elettromagnetismo-Ottica*, Liguri Editore, Napoli (1998).
- [32] AA. VV., *La Fisica nella scuola. Quaderno 2. Proposte didattiche per l'insegnamento della fisica quantistica*, AIF, Modena (1993).
- [33] P. Caldirola, R. Cirelli, G. M. Prosperi, *Introduzione alla Fisica Teorica*, Utet, Torino (1982).
- [34] R. Eisberg, R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, John Wiley & Sons, New York (1985).
- [35] A. H. Compton, *The spectrum of scattered X-Rays*, Phys. Rev., 22(5):409-413, (1923).

- [36] A. H. Compton, *A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements*, Phys. Rev, 21(5):483-502, (1923).
- [37] G. F. Knoll, *Radiation Detection and Measurement*, John Wiley & Sons, New York (1999).
- [38] J. E. Parks, *The Compton Effect - Compton Scattering and Gamma Ray Spectroscopy*, Department of Physics and Astronomy, The University of Tennessee, Knoxville, (2015).
- [39] L. E. Casano, *I rivelatori di radiazione*, Dispense di Fisica Applicata, (2004).
- [40] E. Segrè, *Nuclei e particelle: introduzione alla fisica nucleare e subnucleare*, Zanichelli, Bologna (1966).