***Facoltà di Scienze MM.FF.NN.***
***Progetto LLP – POR Regione Campania***
***Educazione Scientifica e Matematica nella Scuola dell'Infanzia***

**Materiale di lavoro per gli adulti**
Il materiale è rivolto agli insegnanti, ai dirigenti scolastici e ai genitori, ed è presentato sotto forma sintetica di note-guida per discussioni sulla progettazione e valutazione di attività con i bambini e per approfondimenti che richiederanno lo studio dei materiali di riferimento**.**

---

**In Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity**[1] si individuano, sulla base dei dati della ricerca, due aree della matematica come centrali e coerenti con la conoscenza naturale e il pensiero intuitivo del bambino in età prescolare. La prima area riguarda i numeri, le relazioni e le operazioni, la seconda la geometria, il pensiero spaziale e la misura. Entrambe sono ritenute fondamentali per lo sviluppo delle conoscenze e competenze matematiche che via via il bambino acquisisce poi nella formazione scolastica.
Nelle pagine che seguono riportiamo una sintesi delle indicazioni della ricerca in merito a queste due aree, e che nello specifico fanno riferimento ai capitoli 2 e 5 – per quanto riguarda *i numeri, le relazioni e le operazioni* – e ai capitoli 3 e 6 – per quanto riguarda *la geometria, il pensiero spaziale e la misura*.
I capitoli 2-3-5-6 estratti dal report, in versione originale e con le referenze, sono allegati a questo documento.

---

**Il pallino della matematica** (Stanislas Dehaene, Cortina Raffaello, 2010)
*"Fin dalla nascita* [l'uomo] *dispone di un accumulatore interno in grado di valutare in modo approssimativo gli oggetti che lo circondano".*

*Tutti noi, negati per la matematica o dotati di straordinarie capacità di calcolo, siamo venuti al mondo con una vera e propria intuizione dei numeri. Alcuni esperimenti hanno dimostrato, infatti, che i neonati sanno che 1+1 fa 2 o che 2 è diverso da 3, e perfino che certi animali riescono a cogliere le distinzioni quantitative tra gli oggetti. Ma allora perché, dopo anni passati a studiare le tabelline, spesso non riusciamo a risolvere immediatamente 7x8 o impieghiamo più tempo a rispondere che 65 è maggiore di 64 di quanto ce ne occorre per dire che è maggiore di 9? E come mai una lesione cerebrale può toglierci la capacità di leggere e scrivere ma non quella di far di conto? E' evidente che non siamo macchine logiche: la metafora del cervello-computer è insufficiente e limitativa. L'invenzione di un linguaggio dei numeri appartiene alla storia culturale recente dell'umanità: il nostro cervello non si è evoluto con lo scopo di praticare calcoli formali; gli algoritmi sofisticati dell'aritmetica superano le capacità naturali dell'architettura cerebrale, di per sé dotata solo di un'idea vaga e approssimativa dei numeri.*
*Stanislas Dehaene descrive in queste pagine gli straordinari studi condotti sul cervello, mostrando come gli oggetti matematici vengano da esso manipolati e quali siano le parti dei due emisferi specializzate nell'associazione dei numeri con lo spazio, nella loro visualizzazione mentale (non dissimile da quella dei colori) e nell'elaborazione aritmetica (quando facciamo una sottrazione, una moltiplicazione o un confronto si attivano regioni cerebrali diverse). Con l'analisi del senso innato delle quantità, e dell'origine del talento matematico negli scienziati o in alcuni handicappati mentali, l'autore mostra l'infondatezza dell'ipotesi di un legame diretto tra la misura del cervello e l'intelligenza, così come quella di una superiorità maschile, e fornisce utili consigli a chi abbia responsabilità educative.*[2]

[1] http://www.nap.edu/catalog.php?record_id=12519
[2] http://www.math.it/libri/ilpallino.htm

* * *

# Il Numero

Il numero è un concetto fondamentale per descrivere il mondo. I numeri sono un'astrazione che applichiamo ad un vasto range di situazioni – cinque bambini, il cinque su un dado, cinque caramelle, cinque dita, cinque anni, cinque metri, cinque idee. Dal momento che sono un'astrazione, i numeri sono incredibilmente versatili nel modo di descrivere il mondo. "Tuttavia, al fine di poter parlare di numeri, le persone hanno bisogno di rappresentazioni – qualche cosa di fisico, parlato o scritto" (National Research Council, 2001, p. 72). Comprendere il concetto di *numero* e quelli ad esso legati, significa comprendere i concetti di *quantità* e *quantità relative*, contare con facilità ed essere abili nell'effettuare semplici operazioni.

Vi è una considerevole variabilità nelle età in cui i bambini svolgono particolari compiti numerici (vedi in Clements and Sarama, 2007, 2008; Fuson, 1992a, 1992b). Tuttavia, una quantità considerevole di questa variabilità deriva da differenze nelle opportunità di apprendere tali compiti e nell'opportunità di praticarli mediante feedback occasionali mirati a correggere gli errori e ad estendere l'apprendimento. Una volta avviati lungo un percorso di *formazione numerica*, i bambini cominciano ad interessarsi al consolidamento e all'estensione della loro conoscenza, esercitandosi da soli e scovando ulteriori informazioni, facendo domande e affidandosi da soli nuovi compiti. La casa, l'asilo, gli ambienti prescolari e scolari devono sostenere i bambini in questo processo di appropriato auto-avvio e apprendimento auto-didatta e facilitarne lo svolgimento.

I bambini apprendono, integrano ed estendono le loro conoscenze riguardanti i numeri in successivi step nell'età compresa tra i 2 e i 7 anni. Tali conoscenze spaziano e si sviluppano in diversi ambiti strettamente interconnessi tra loro, che fanno riferimento a quattro aspetti fondamentali:

1) La cardinalità – quanti elementi sono presenti in un dato insieme – nei bambini aumenta non appena essi imparano ad associare una parola al numero di oggetti che osservano (ad esempio: "*Vedo due crackers sul tavolo"*).
2) La lista delle parole per indicare i numeri: i bambini cominciano ad imparare una lista di parole per indicare i numeri inizialmente come una sorta di "canto" separato dall'uso di quella lista per contare gli oggetti.
3) La corrispondenza 1 a 1 nel contare: quando i bambini iniziano a contare, utilizzano una corrispondenza 1-1 in modo tale da associare ad ogni oggetto di un insieme un certo numero mediante una parola.
4) L'associazione di un simbolo al numero: i bambini imparano i simboli dei numeri sentendoli nominare con la parola ad essi associata ("*quello è un due", "questo numero è un tre", etc.).*

**La Cardinalità**

Il processo di identificazione del numero di oggetti in un dato insieme (*cardinalità*) è definito *subitizing.* In realtà il termine tecnico adoperato è *perceptual subitizing*, che si differenzia da quello più generale associato alla cardinalità di insiemi più grandi (*conceptual subitizing*) (Clements, 1999). Il passaggio dalla prima fase (*perceptual*) alla seconda (*conceptual*) passa attraverso il prendere in considerazione prima oggetti che sono fisicamente presenti, e successivamente oggetti non presenti che vengono visualizzati dal bambino nella sua mente, presupponendo livelli di astrazione più elevati (Benson e Baroody, 2002).
Questo passaggio da una configurazione ad un'altra, rappresenta uno step concettuale fondamentale per mettere in relazione la parola che esprime un numero con la cardinalità dell'insieme esaminato. Infatti, è convinzione comune che le parole associate ai numeri rappresentino strumenti indispensabili per la costruzione del concetto di cardinalità, anche per piccoli insiemi, come di 3 o 4

elementi, o addirittura di 1 e 2 oggetti (Baroody e Benson, 2003; Benson e Baroody, 2002; Spelke, 2003; Baroody, Lai, e Mix, 2006; Mix, Sanhofer, Baroody, 2005).
I bambini di solito imparano le parole associate ai primi 10 numeri ("uno", "due", etc.) a memoria, non correlandole a delle quantità (Wynn, 1990; Lipton and Spelke, 2006; Fuson, 1988, Ginsburg, 1977). Iniziano innanzi tutto a lavorare con le dita delle mani per rappresentare insiemi poco numerosi; questo processo è molto importante in quanto quelle che inizialmente sono le dita della mano diventeranno in seguito gli strumenti per eseguire addizioni e sottrazioni (Clements and Sarama, 2007; Fuson, 1992a o b).

Per comprendere appieno il concetto di cardinalità, i bambini devono essere in grado di generalizzare e di estendere le proprie idee, cioè devono acquisire la capacità di astrarre e generalizzare da uno specifico caso (per esempio l'insieme costituito da due crackers) un concetto universale (due entità presenti in ogni insieme di due elementi). Essi devono inoltre estendere la propria conoscenza a insiemi di elementi sempre più grandi (da uno, a due, a tre, quattro e cinque, sebbene questi siano più difficili da immaginare e distinguere). Le prime nozioni di cardinalità dei bambini e il come e il quando essi imparino a distinguere piccoli insiemi associando parole ai numeri, rappresentano, attualmente, uno degli oggetti di interesse della ricerca in didattica. La tempistica di queste intuizioni è legata alla struttura grammaticale della lingua nativa del bambino (Sarnecka, Kamenskaya, Yamana, Ogura, e Yudovina, 2007). Successivamente i bambini possono imparare a distinguere più rapidamente la quantità di oggetti presenti in insiemi più grandi se questi possono essere decomposti in insiemi con numeri più piccoli (*Vedo due e tre,e so che insieme fanno cinque).* Questo processo viene definito *conceptual subitizing* (Clements, 1999), in quanto si basa su un processo di apprendimento basato su un approccio visivo consistente nella decomposizione del un numero in una coppia di numeri più piccoli, piuttosto che sul contare direttamente il numero di partenza . Il *conceptual subitizing* consiste nel considerare i numeri più piccoli come addendi per ottenere il totale (il numero più grande di partenza). Questi modelli sono utili per far distinguere a bambini più grandi anche gruppi di 5 o 10 elementi. In questo modo i bambini imparano anche ad assegnare un numero ad insiemi costituiti da entità che ascoltano ma non vedono, come i battiti di un tamburo o come i rintocchi delle campane. Oggi c'è ancora poca ricerca sulle tematiche relative al concetto di numero associato a fenomeni uditivi; anzi, questi ultimi giocano un ruolo ancora più piccolo nella formulazione matematica di quesiti ed esercizi. Per tutte queste ragioni, e poiché i fenomeni uditivi si collegano alla musica, al ritmo e ai movimenti del corpo, sembra ragionevole proporre delle attività nelle classi in cui i bambini devono riprodurre i suoni che ascoltano (battito, battito, successivamente battito battito battito, pausa battito battito), associando un numero a ciò che ascoltano (*quanti rintocchi di campana? Quanti battiti di tamburo?*) e produrre determinate quantità di suoni con il proprio corpo (*Battiamo tre volte le mani*).

È molto importante che le prime esperienze con il *subitizing* siano eseguite con oggetti semplici, familiari, legati alla vita quotidiana del bambino. Molti libri di testo presentano spesso insiemi di oggetti difficili da contare. Altri fattori che complicano l'applicazione del processo di *subitizing* sono rappresentati dalla sovrapposizione degli oggetti in un insieme, dalla mancanza di simmetria negli elementi che lo costituiscono, oppure dalla scelta stessa degli elementi poco opportuna (ad esempio un insieme costituito da animali di diverse dimensioni raffigurati in maniera molto dettagliata piuttosto che cerchi o quadrati) (Clements e Sarama, 2006). L'importanza di facilitare il *subitizing* è sottolineata da una serie di studi, che hanno condotto in un primo momento alla conclusione che la naturale tendenza dei bambini a concentrarsi sulla numerosità fosse legata a competenze aritmetiche e di conteggio, e in seguito alla considerazione che è possibile aumentare il grado di queste competenze ottenendo risultati sempre migliori sulla cardinalità (Hannula, 2005).
Aumentare il livello di attenzione naturale sulla numerosità è un esempio di come sia possibile aiutare i bambini a matematizzare l'ambiente in cui vivono (ricercando ed utilizzando informazioni matematiche in esso).

**Il superamento del punto di vista piagetiano**

I bambini sono abili a discriminare insiemi che hanno un numero differente di elementi, ma non hanno consapevolezza del fatto che insiemi differenti contenenti lo stesso numero di oggetti rappresentino una stessa *categoria* o una *classe di equivalenza.* Diversi studi (e.g., Starkey, Spelke and Gelman, 1990; Strauss and Curtis, 1984) hanno permesso di indagare sull'attitudine che hanno i bambini nel riuscire a distinguere, o meno, uguali categorie (cioè insiemi differenti contenenti lo stesso numero di elementi) di oggetti (per esempio insiemi costituiti da due galline, due cani, due colpi di tamburo, due salti). I risultati delle ricerche hanno evidenziato come i bambini abbiano già insito il concetto di *classe di equivalenza numerica* nel momento in cui vengono posti di fronte a fotografie o immagini raffiguranti insiemi contenenti lo stesso numero di oggetti, ma differenti gli uni dagli altri. Sebbene alcuni risultati di ricerca ( Starkey, Spelko, Gelman (1983) ) abbiano evidenziato come già bambini di sette mesi siano in grado di riconoscere l'uguaglianza tra insiemi differenti di 2 o 3 elementi (mostrando quindi come sia insita nei neonati l'idea astratta del concetto di numero), ogni tentativo di replicare questi importanti risultati non ha condotto ad alcuna risposta definitiva, e la questione è ancora per molti aspetti oggi aperta.

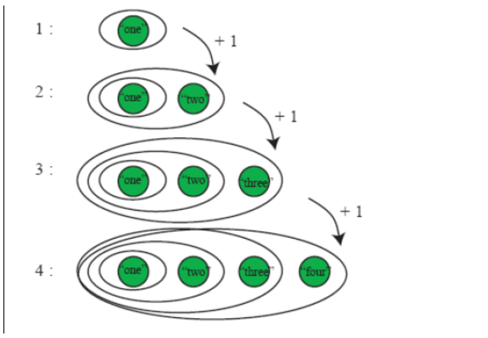
Uno degli obiettivi della ricerca, oggi, è capire i tempi e i modi in cui i bambini sono in grado di rappresentare i numeri. I risultati di diversi studi hanno mostrato che i neonati hanno abilità limitate nel classificare insiemi di differenti dimensioni: sono ad esempio in grado di distinguere insiemi di 2 elementi da insiemi di 3, ma non insiemi di 4 elementi da insiemi di 6. Quello che si è ricavato è che i bambini sono in grado di distinguere insiemi con un rapporto di elementi 2:1 dai 6 mesi di vita in poi, e insiemi con rapporto di elementi 2:3 dai 9 mesi in poi. Altri settori della ricerca sono invece indirizzati verso lo studio e l'analisi delle capacità dei bambini nel riconoscere relazioni tra numeri, e nella loro abilità nel comprendere addizioni e sottrazioni. Lo studio di queste tematiche e della conoscenza dei numeri in età infantile rappresenta un forte distacco dai precedenti punti di vista, pesantemente influenzati dalle teorie di Piaget riguardanti la *conservazione della quantità.*
Sebbene Piaget riconobbe che i bambini acquisiscano competenze matematiche di un certo livello anche in età precoce, i numerosi studi condotti sulla *conservazione della quantità* portarono, in ambito scientifico, all'idea diffusa che essa rappresentasse lo strumento necessario senza il quale non sarebbe possibile comprendere il concetto di numero.

A partire dagli anni '60 e '70, i ricercatori hanno iniziato ad esaminare in maniera più analitica le competenze numeriche dei bambini, portando ad una revisione delle vecchie teorie basate prevalentemente sull'approccio piagetiano. Le ricerche hanno infatti evidenziato che i bambini presentano un gran numero di competenze matematiche già in età prescolare, come il *contare* e l'attivare *strategie di corrispondenza*, attraverso cui sono in grado di quantificare e di stabilire relazioni tra insiemi di oggetti, ribaltando così il punto di vista pigetiano della mancanza del concetto di conservazione.

**Il Contare**

Il concetto di numero inizia a diventare importante per il bambino non appena egli inizia ad associarlo all'atto del "contare". I numeri permettono, infatti, di quantificare gli oggetti presenti in un certo insieme. Tramite essi è possibile fornire informazioni specifiche e dettagliate sugli elementi presenti in un determinato ambiente (ad esempio il numero di giocattoli presenti in una cesta. Inizialmente, per esempio, la quantità di orsetti presenti in un box può apparire agli occhi di un bambino solo come "alcuni pupazzi". L'atto del contare permette invece di passare da un'informazione approssimata e vaga ad una più dettagliata (ad esempio che sono presenti sette orsetti nella cesta). Per imparare a contare, i bambini necessitano di numerosi esercizi a partire dai numeri piccoli, per poi passare ad esercizi simili, con numeri sempre più grandi. All'inizio, questo processo è completamente slegato dal concetto di cardinalità (ossia l'ammontare complessivo di elementi in uno specifico insieme). La connessione tra l'atto del contare e la cardinalità di un insieme è un passo cruciale nel processo di apprendimento del bambino: contare deve diventare un'operazione molto veloce, in modo tale da diventare un mezzo mentale rappresentativo per risolvere problemi. Fin da piccoli, nel percorso di insegnamento/apprendimento, si possono inserire esercizi che supportino, in seguito, l'apprendimento del calcolo algebrico. Per fare ciò però è necessario che il metodo di insegnamento preveda una continua interazione con contesti di problemi reali ed espliciti, che diano feedback e opportunità di riflessione. Inoltre, è necessario proporre situazioni accessibili e familiari al bambino, in cui egli possa praticare e consolidare, approfondire ed estendere anche autonomamente il suo apprendimento.

I numeri rappresentano un'astrazione della nozione di quantità, in quanto ogni dato numero può quantificare un'infinita varietà di situazioni. Ad esempio, si può utilizzare il numero 3 riferendosi a tre bambole, a tre persone, o a tre battiti di tamburo, etc. In definitiva, si può pensare al numero 3 come ad un concetto astratto e comune a tutti questi insiemi differenti tra loro. Com'è possibile evidenziare l'aspetto in comune che mostrano tutti questi (e altri) insiemi costituti da tre elementi? Alla base di questo processo c'è il concetto di *corrispondenza 1 a 1*. Qualsiasi coppia di insiemi di 3 oggetti può essere messa in corrispondenza, associando ad ogni elemento del primo insieme uno ed un unico elemento del secondo. Ad esempio, se consideriamo un insieme costituito da 3 caramelle ed uno costituito da 3 uova, i due insiemi possono essere messi in relazione tra loro in modo da associare ad ogni caramella del primo insieme un uovo del secondo, in maniera tale che ogni caramella non può essere associata a più uova (e viceversa), e nessuna caramella o uovo non può rimanere non collegato. Ad esempio, quando il bambino conta un insieme costituito da sette orsetti, stabilisce una corrispondenza 1 a 1 tra la lista di numeri: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, e la collezione di pupazzi che ha di fronte. Per contare gli orsi, il bambino scorre la lista dei numeri associando in successione ad ogni numero un orsetto diverso. Mentre conta, il bambino passa da un *riferimento di puro conteggio* (fino a 7, quando conta l'ultimo orsetto), ad un *riferimento cardinale*, nel momento in cui si riferisce a 7 come il numero totale di pupazzi presenti. "Contare" fornisce, quindi, un altro modo per connettere l'idea che tutti gli insiemi di un fissato numero di elementi mostrano una caratteristica comune: quando si contano gli elementi di due insiemi che hanno lo stesso numero di oggetti l'ultima parola detta per entrambi è la stessa. Un'altra osservazione chiave è che, per ogni dato numero nella lista, il numero successivo indica quanti oggetti ci sono in un insieme che possiede un oggetto in più rispetto agli insiemi di partenza: ogni numero successivo descrive, quindi, una quantità che è più grande di quella associata al numero e all'insieme precedente. In questo senso, *contare* vuol dire *sommare*: ogni numero aggiunge un elemento in più alla collezione precedente (l'insieme costituito da tre orsi si ottiene aggiungendo un orso all'insieme di due pupazzi precedente, quello di quattro aggiungendo un orso all'insieme di tre orsi di partenza, etc.[vedi figura]:




Queste osservazioni sono basilari per favorire l'approccio del bambino a semplici problemi riguardanti le operazioni di addizione e sottrazione. Ogni numero nella lista ha un unico nome che può essere rappresentato con un unico *simbolo scritto*. I nomi e i simboli dei primi numeri nella lista sono stati tramandati dalla tradizione, tuttavia la loro denominazione nonché nomenclatura è del tutto relativa ed arbitraria. Il sistema decimale usato oggi è molto ingegnoso, in quanto permette di utilizzare solo 10 cifre (da 0 a 9) ed è basato sul raggruppamento ripetuto per 10; il valore di ogni cifra all'interno del numero dipende dalla sua posizione. L'atto del contare può essere inteso come lo sviluppo di una lista infinitamente lunga ed ordinata di numeri distinti in successione. Tale lista inizia con il termine "1", ed ogni numero ha un unico successore. Questo crea uno specifico ordine per contare i numeri: 1, 2, 3, 4,…..Non è possibile escludere alcun numero dalla lista, né tantomeno invertire l'ordine dei suoi elementi. L'utilizzo di una lista di numeri è fondamentale in quanto rappresenta il primo step nell'atto del contare, e quindi nel quantificare il numero di elementi appartenenti ad un dato insieme. Mentre il numero di oggetti in un piccolo insieme (3 o 4 elementi) può essere riconosciuto immediatamente, in generale è necessario usare una lista di numeri per determinare il numero di oggetti in un insieme che ne contiene un numero maggiore. *Contare* vuol dire eseguire una lista di numeri ordinata, di solito scegliendo come elemento di partenza il numero "1" (ma si può anche iniziare da altri numeri, come 5, 6, 7, etc.). Altre forme di conteggio includono il *"conteggio con salto"*, un processo in cui si conta ogni secondo, terzo, o quarto numero (ad esempio: 2, 4, 6, etc. oppure 3, 6, 9, etc.) o il contare all'indietro (10, 9, 8, 7, 6, etc.). Sebbene queste procedure siano familiari e scontate per un individuo adulto, non sono assolutamente ovvie per un bambino: la relazione esistente tra la lista dei numeri da contare e il numero di oggetti presenti in un insieme è molto profonda e sottile, e rappresenta un passo cruciale nella formazione dei più piccoli.

**Corrispondenze nel contare**
Quattro fattori influenzano fortemente l'accuratezza nel contare utilizzando il concetto di *corrispondenza 1 a 1:*

1) La quantità delle esperienze eseguite dal bambino: un numero maggiore di esercizi riduce la percentuale di errori commessi.
2) La dimensione degli insieme di cui si chiede di contare gli elementi: all'inizio, i bambini, danno informazioni più precise ed accurate su insiemi piccoli di elementi.
3) La disposizione degli oggetti da contare: ad esempio disporre gli oggetti lungo una linea rende più semplice mantenere la traccia di ciò che è stato contato e ciò che no.
4) L'impegno (Clements e Sarama, 2007, Fuson, 1988).

Insiemi contenenti pochi oggetti (3 elementi, o in seguito 4 o 5) possono essere facilmente distinti e classificati, qualsiasi sia la loro disposizione nell'insieme, ma un numero maggiore di elementi si possono contare più semplicemente quando questi ultimi sono disposti su una linea. I bambini di 2 e 3 anni sono in grado di contare oggetti fino a 5 qualunque sia la loro disposizione spaziale, e contare oggetti disposti su una linea fino a 10 o più (Clements and Sarama, 2007; Fuson, 1988). In un recente ed innovativo lavoro di ricerca, Gelman e Gallistel (1978) hanno identificato 5 diversi principi connessi all'atto del contare:

1) *Il principio dell'ordine stabile:* la parola associata ad un certo numero deve sempre occupare la stessa posizione nella lista dei numeri.
2) *Il principio uno*-uno: ogni oggetto di un insieme deve essere associato ad un'unica parola della lista dei numeri.
3) *Il principio della* cardinalità: l'ultimo numero nominato, nell'elencare la lista di oggetti presenti, rappresenta il numero di oggetti dell'insieme.
4) *Il principio di* astrazione: ogni combinazione di oggetti discreti può essere contata, anche se non sono visibili e tangibili – ad esempio, i sette giorni della settimana.
5) *Il principio di irrilevanza* nell'ordine: gli elementi di un insieme possono essere contati in qualsiasi ordine, fornendo sempre lo stesso risultato finale.

Gelman ha assunto una posizione molto forte nell'affermare che i bambini sono in grado di comprendere questi principi molto presto, usandoli per indirizzare le loro attività. Altri hanno argomentato che almeno alcuni di questi principi possono essere assimilati solo dopo un certo numero di esperienze ripetute di conteggio  (e.g., Briars and Siegler, 1984). Altri ancora ritengono che vi sia una relazione tra il comprendere i principi legati all'attività del contare e le competenze legate al contare stesso (Baroody, 1992; Baroody, Ginsburg, 1986; Fuson, 1988; Miller, 1992; Rittle-Johnson and Siegler, 1998).

I principi su *come contare* possono avere diverse chiavi di lettura; è necessario un po' più di tempo per far si che i bambini imparino a contare *parti* di un oggetto (Shipley e Shepperson, 1990; Sophian e  Kailihiwa, 1998), facendo quindi un uso più ampio del principio di astrazione.
Il *principio sull'irrilevanza dell'ordine* – contare secondo qualsiasi ordine, non cambia il risultato finale – può dar luogo a delle considerazioni su quale debba essere il modo convenzionale di contare (per es., iniziare a contare a partire da un estremo di una riga di elementi piuttosto che dal centro), così come coinvolge, successivamente, una comprensione più approfondita del processo di corrispondenza 1-1: contare è corretto se e solo se ad ogni oggetto viene associata una parola-numero (LeFevre, Smith-Chant, Fast, Skwarchuk, Sargla, Arnup, et al., 2006).
Un aspetto del principio di corrispondenza 1-1 che è difficile anche per studenti di scuola superiore e per gli adulti è ricordare esattamente quali oggetti sono stati già contati quando si dispone di un insieme costituito da un gran numero di elementi sparsi in maniera irregolare (come ad esempio in un quadro) (Fuson, 1988). I cinque principi su descritti, sono utili per comprendere i meccanismi con cui i bambini iniziano a contare, e rappresentano punti di riferimento importanti per insegnanti e genitori, che possono utilizzarli per portare i bambini a riflettere su alcuni aspetti (per es. *Ricorda che ad ogni oggetto bisogna associare una sola parola-numero; non puoi saltare nessun elemento nella lista dei numeri; ricorda da che punto sei partito a contare nel cerchio, in modo da poterti fermare all'elemento immediatamente precedente*).
Nonostante ciò, i bambini continuano a commettere errori anche quando capiscono il compito che gli viene affidato, in quanto *contare* è un'attività complessa. Comunque, già dall'età di 4 anni i bambini sono in grado di contare un numero considerevole. Essi partono da un livello di base in cui non sono in grado di contare gli oggetti di insiemi molto numerosi, fino a raggiungere notevoli competenze nel discriminare oggetti di insiemi molto grandi, riducendo notevolmente la percentuale di errore (a meno che gli oggetti non siano disposti in maniera disorganizzata e, pertanto, i bambini non riescono a spostarli per  mantenere memoria di quale venga contato e quale no; ad esempio dividendo gli oggetti in maniera tale da costituire una pila con gli oggetti contati, ed una con quelli non contati) (Fuson, 1988).
In ogni caso l'impegno da dover spendere in queste attività da parte del bambino  è indispensabile; i bambini disattenti o sfiduciati potenzialmente commettono più errori di quanti ne farebbero dopo che si chiede loro di sforzarsi o di contare lentamente. In questa fase i bambini lavorano sul contare insiemi di oggetti disposti su linee costituite da 10 o più elementi, mostrando in maniera notevole maggiore precisione nel conteggio rispetto ai bambini di appena un anno più piccoli (Clements and Sarama, 2007; Fuson, 1988).

Ovviamente, contare con precisione dipende anche e soprattutto da una buona conoscenza della lista delle parole per indicare i numeri, ed in definitiva da tre fattori:

1) L'elaborazione di modelli linguistici specifici che facilitino la comprensione dell'associazione parola-numero (*20 è due volte dieci, 30 è tre volte dieci, etc.*)
2) Il collegamento di ogni oggetto ad un numero associato ad una parola (corrispondenza 1-1) ì
3) La memoria di quali oggetti sono stati già contati, in maniera tale da non contarli nuovamente.

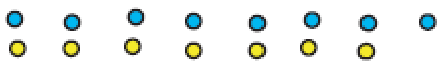
**Relazioni ed operazioni tra numeri**
I numeri non possono esistere da soli. Essi costituiscono bensì un sistema coerente di elementi che possono essere confrontati, aggiunti, sottratti, moltiplicati e divisi tra loro. Così come i numeri rappresentano delle astrazioni del concetto di "quantità", le relazioni ("più piccolo di", "più grande di" e "uguale a") – così come le quattro operazioni (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione) – rappresentano astrazioni relative alle operazioni di confrontare, combinare e separare quantità di oggetti.
Le relazioni e le operazioni rappresentano il perno di un gran numero di problemi. Analizziamo alcuni casi in dettaglio:

- **Confrontare**

In alcuni casi è subito evidente quando un insieme contiene più elementi di un altro:

(l'insieme costituito dalle palline gialle è più numeroso di quello costituito dalle palline blu), ma in altri non è immediato comunicare quale dei due insiemi abbia più elementi di un altro semplicemente "osservando":

(in questo caso non è immediato stabilire quale insieme contenga più elementi).
Un modo semplice per guidare il bambino al confronto tra due insiemi è quello di fargli associare ogni elemento del primo insieme ad un elemento del secondo, notando così se vi sono elementi nel primo o nel secondo insieme che non hanno corrispondenti :



In questo caso, essendovi una perlina blu che non ha alcuna perlina gialla corrispondente, è possibile stabilire che l'insieme delle perline blu ha un numero maggiore di elementi rispetto a quello delle perline gialle. Un altro modo che differisce da quello appena discusso di mettere in corrispondenza gli elementi dei due insiemi, consiste nel far contare al bambino il numero di perline presenti nei due insiemi per stabilire quale dei due sia più numeroso:

"uno, due, tre, quattro, cinque, sei sette, otto perline"

"uno, due , tre, quattro, cinque, sei, sette perline"

Contare, quindi, è uno strumento più potente rispetto all'associazione diretta in quanto permette di confrontare anche insiemi di oggetti non strettamente vicini tra loro nello spazio. Un punto fondamentale riguardo gli insiemi di oggetti è che il contare mette in relazione il numero della lista (ad esempio il numero 7) con la cardinalità dell'insieme (ci sono 7 perline blu).

- **Problemi e situazioni che coinvolgono addizioni e sottrazioni:**

Addizioni e sottrazioni permettono di confrontare delle quantità prima e dopo che queste vengano combinate tra loro. I metodi che i bambini utilizzano per risolvere problemi che riguardano le operazioni di addizione e sottrazione permettono di connettere il concetto di *lista di numeri* e *cardinalità.* Metodi più evoluti (che si possono affinare a partire dalla scuola elementare in poi) si basano sulle decomposizione dei numeri e sulla comprensione del sistema decimale (ad esempio, il numero 19 può essere visto come l'unione di due insiemi: il primo contenente dieci unità, il secondo nove). Analizzati da prospettive più evolute e avanzate, la maggior parte di questi problemi può essere risolta attraverso equazioni del tipo:

$$A + B = C \quad \text{o} \quad A - B = C$$

dove con A si indica una certa quantità iniziale, con B la quantità di cui A viene modificata, e C la quantità finale. In queste equazioni due delle tre incognite presenti (A, B, C) sono note, e il problema consiste nel determinare la terza incognita, in modo che l'uguaglianza sia soddisfatta. Gli esercizi in cui le grandezze A e B sono note e C deve essere determinata, sono classici problemi in cui bisogna eseguire addizioni e sottrazioni . Consideriamo il seguente esempio:

*"Marco ha 9 soldatini, e ne regala 3 all'amico Carlo. Quanti soldatini gli rimangono?"*

Il problema può essere formalizzato scrivendo la seguente espressione:

$$\text{Numero di soldatini rimanenti} = 9 - 3 = ?$$

È possibile poi formulare la soluzione del problema in maniera differente, partendo dal considerare che se Carlo restituisse all'amico Marco i tre pupazzetti che quest'ultimo gli ha regalato, riavrebbe nuovamente l'intera collezione di 9 soldatini. La formalizzazione del problema, in questo caso, è la seguente:

$$? + 3 = 9$$

Consideriamo un altro esempio:

*" Carlo possiede 5 figurine, Dopo averne vinte alcune durante un gioco con i suoi compagni, ne conta 8 in totale. Quante carte ha vinto Carlo?"*

Il problema proposto può essere risolto a partire dalla seguente espressione:

$$5 + ? = 8$$

I bambini che vengono portati a ragionare in questo modo, tendenzialmente risolvono il problema partendo dal numero cinque e contando di quanti elementi si ha bisogno per ottenere il numero 8. Un livello più avanzato di astrazione porta i bambini a risolvere il problema effettuando la sottrazione:

$$8 - 5 = ?$$

cioè utilizzando l'operazione inversa dell'addizione.

Entrambi gli esempi proposti mostrano come sia possibile passare da una formalizzazione in cui si utilizza la sottrazione ad una in cui si utilizza l'addizione (e viceversa). Effettuare un'operazione tra due quantità, nello specifico la sottrazione, permette di determinare un ordine tra due insiemi, di stabilire una relazione precisa che quantifichi in maniera esatta di quanto A è maggiore di B o viceversa. Allo stesso tempo, richiede uno sforzo di astrazione notevole: effettuare l'operazione $A - B = C$ richiede infatti la capacità di creare un insieme fisicamente non presente. La differenza C rappresenta infatti quella parte dell'insieme più grande (A) costituito da elementi che non possono essere associati ad alcun elemento dell'insieme più piccolo (B) o, analogamente, quegli elementi che aggiunti a quelli dell'insieme più piccolo (B) determinano un ulteriore insieme di oggetti che possono essere messi in corrispondenza 1 a 1 con gli elementi dell'insieme più grande (A). A partire da queste considerazioni, si possono costruire problemi più sofisticati: per esempio, si potrebbe arrivare a ragionare con i bambini su equazioni del tipo $C = A + B$, in cui C è una quantità nota bisogna ricavare tutte le possibili combinazione di A e B per rendere vera l'uguaglianza. È ovvio che problemi di questo tipo coinvolgono livelli di astrazione sempre più complessi.

**Panoramica degli step di insegnamento di *numeri, relazioni e operazioni***

Un percorso di insegnamento/apprendimento, consiste di step significativi nell'apprendimento di un particolare argomento. Ogni nuovo step si basa su quello precedente. I percorsi che mostriamo si basano su ricerche, che mostrano come i bambini generalmente, seguono percorsi particolari a seconda dell'area in questione.

Sono stati individuati quattro step, correlati ed organizzati per età e grado scolastico: step 2 e 3 anni, step 4 anni o età prescolastica, step scuola dell'infanzia, step prima elementare. E' evidente che in prima elementare, la conoscenza degli step precedenti è fondamentale per riuscire bene nella materia.

**Step 1 (età 2 e 3):**

I bambini di 2 e 3 anni apprendono i seguenti concetti riguardo ai primi numeri: la cardinalità, la lista dei numeri, le corrispondenze 1 a 1, e i simboli dei numeri scritti: in seguito essi coordinano questi aspetti dei numeri per contare *n* cose e poi imparano a denominare i numeri. Si usano strategie di percezione, lunghezza e densità per determinare chi è il maggiore tra due numeri e si iniziano a risolvere problemi in cui si fa riferimento ai numeri cardinali, il cui risultato è una somma minore o uguale a 5, con l'utilizzo di oggetti che sono rappresentativi della situazione in esame. In questo modo il risultato viene anche percepito dal bambino, dal punto di vista visivo.

Esempi di problemi che possono risolvere sono i seguenti:

1) due blocchi più due blocchi fanno quattro blocchi;
2) da quattro mele se togli una mela, restano tre mele;
3) tre mele si possono vedere come due e una che messe insieme fanno tre

**Step 2 (età 4 / prescolare):**

In questa fase si estendono gli aspetti descritti nello step 1 (la cardinalità, la lista dei numeri, le corrispondenze 1 a 1, e i simboli dei numeri scritti) ai numeri più grandi. Si usano strategie algebriche per trovare chi è il maggiore tra due numeri e si iniziano a risolvere problemi in cui si fa riferimento ai numeri cardinali, il cui risultato è una somma minore o uguale ad 8, con l'utilizzo di oggetti che sono rappresentativi della situazione in esame o anche con le dita.

Esempi di problemi che si possono risolvere sono i seguenti:

- due e due fa?
- se a quattro si toglie uno, è?

**Step 3 (età5 /asilo):**

Si individuano le decine e le unità nei numeri decimali e si relaziona, 10 unità a 1 decina. in questa fase per determinare il maggiore tra due numeri, i bambini fanno riferimento a termini di paragone come oggetti o disegni, da unire o contare. Si iniziano a risolvere problemi in cui si fa riferimento ai numeri cardinali, il cui risultato è una somma minore o uguale a 10. Questi si possono risolvere con l'utilizzo di oggetti, dita o con disegni. L'insegnante può iniziare a fare un grafico e a scrivere un' equazione.

**Step 4 (prima elementare):**

Si inizia a contare e scrivere in decine- unità e a sapere le unità da 1 a 100; si iniziano a risolvere problemi nei quali è chiesto ad esempio: *"Dati due gruppi di oggetti, quale gruppo è di più, rispetto all' altro?"*. Si iniziano a risolvere problemi in cui si fa riferimento ai numeri cardinali, il cui risultato è una somma minore o uguale a 18; si trova la sottrazione come un addendo sconosciuto. (Ad esempio si risolvono problemi come "9 - 6= ?" o come "6 + ? = 9").

**La geometria innata**

*"Non ci sono più scuse: da oggi nessuno potrà più dire che la geometria non la capirà mai perché non c'è portato"*

**L'innata intuizione euclidea dello spazio**

(Le Scienze 25.4.2011)[3]

"I Munduruku, la cui lingua non possiede parole per concetti geometrici, hanno comunque un livello di comprensione geometrica equivalente e a volte superiore a quello dei bambini francesi e americani.

Le nostre intuizioni geometriche sono innate e si conformano sostanzialmente alla geometria euclidea. E' quanto risulta da uno studio condotto dal gruppo di ricerca diretta da Stanislas Dehaene - composto da Véronique Izard, Pierre Pica ed Elizabeth S. Spelkec - che ha studiato i membri di una tribù amazzonica priva di alcuna formazione scolastica formale, quella dei Munduruku.

I ricercatori hanno esaminato come i Munduruku pensano a linee, punti, angoli e constatando un livello di comprensione equivalente e a volte superiore a quello esibito dai di bambini francesi e americani specialmente di fronte a compiti che coinvolgevano superfici sferiche. Lo studio è descritto in un articolo pubblicato sui Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS).[4]

Le idee geometriche che abbiamo sono profondamente influenzate dall'educazione, ma è un dibattito aperto se la capacità, o intuizione, geometrica sia universale e indipendente dalla lingua e dall'educazione.

La lingua Munduruku possiede solo quantità numeriche approssimate e non ha molti termini geometrici, per indicare cose come il quadrato o il triangolo e non c'è neppure modo di dire che due linee sono parallele... sembrerebbe che quel linguaggio non possieda tali concetti", spiega Pica. Per questo i membri di questa tribù rappresentano un'occasione particolarmente interessante per studiare il "peso specifico" che linguaggio, educazione e intuizioni innate hanno nella formazione dei nostri concetti matematici. Negli anni scorsi il gruppo di ricerca di Dehaene aveva già collaborato con i membri di quella tribù proprio per comprendere meglio le basi e lo sviluppo dei concetti matematici numerici, uno studio i cui risultati sono ampiamente illustrati nel libro, Il pallino della matematica."

* * *

## Sviluppo del Pensiero Spaziale e della Geometria

Il pensiero spaziale, come il pensiero numerico, è un aspetto fondamentale della matematica che ha le sue radici nelle abilità che emergono sin dai primi anni di vita, in particolare nella geometria, nella misura e nelle relazioni tra le parti e il tutto. I risultati della ricerca individuano in esso un ingrediente significativo sia dei successi in matematica e in scienze, che della capacità di gestire il complesso delle abilità linguistiche e logico-matematiche. Tra l'altro dà la possibilità di prefigurare ciò che può accadere, ad esempio concettualizzare le relazioni in un problema prima ancora di risolverlo.

Le funzioni mentali coinvolte nel pensiero spaziale includono la categorizzazione delle forme e degli oggetti e la codifica delle relazioni categoriali e metriche tra forme e oggetti. Inoltre il pensiero spaziale risulta cruciale nella rappresentazione delle trasformazioni di oggetti e nei risultati di queste trasformazioni (per esempio, rotazione, traslazione, ingrandimento, piegatura), così come per il cambiamento di prospettiva che si verifica quando ci si muove verso nuove posizioni.

Contrariamente all'impostazione di Piaget, che nega la precocità delle abilità spaziali, le recenti ricerche hanno dimostrato che i neonati sono in grado di codificare le informazioni spaziali riguardo a oggetti, forme, distanze e posizioni. Questa comparsa precoce delle abilità spaziali è ereditata dalla nostra storia evolutiva ed è caratteristica di tutte le specie dotate di movimento.

In particolare gli esseri umani si caratterizzano per la loro unicità. La nostra capacità di pensare spazialmente si sviluppa e si perfeziona mediante l'uso di sistemi simbolici spaziali, come il linguaggio, le mappe, i grafici e i diagrammi, e di strumenti spaziali, come quelli per la misura.

[3] http://www.lescienze.it/news/2011/05/25/news/l_innata_intuizione_euclidea_dello_spazio-551934/

[4] http://www.pnas.org/content/early/2011/05/18/1016686108

In questo senso, non sorprende che l'evoluzione dello sviluppo spaziale nei bambini dipenda fortemente da significative "esperienze spaziali", sia relative al linguaggio spaziale sia relative ad attività spaziali, quali per esempio il gioco delle costruzioni, il ricomporre un puzzle, ecc.

**Punti di Partenza nell'Infanzia**

Anche i bambini piccoli sono in grado di segmentare i propri complessi ambienti visivi in oggetti che hanno forme stabili, utilizzando principi come la coesione, la limitatezza e la rigidità. Inoltre i neonati percepiscono le somiglianze tra oggetti tridimensionali e le loro fotografie e sono in grado di riconoscere gli aspetti invarianti di una forma mostrata da angolazioni diverse.Essi sono in grado inoltre di formare categorie di relazioni spaziali: già dai primi 3 mesi di vita sono sensibili alle categorie sopra/sotto e sinistra/destra.

**Trasformazioni Mentali e Forme**

La rotazione mentale (ovvero la capacità di visualizzare e manipolare il movimento di oggetti bidimensionali e tridimensionali) e la visualizzazione spaziale (il possesso di una forma nella mente e il riconoscimento della forma presente in figure più complesse, mediante composizione e orientamento) sono abilità spaziali fondamentali, essenziali per l'apprendimento della matematica. Diversi studi recenti hanno dimostrato che i bambini in età prescolare sono in grado di ruotare le forme mentalmente. Marmor (1975) ha dimostrato che i bambini di 5 anni compiono mentalmente una rotazione di immagini visive per determinare se una immagine è la stessa di un altra. Allo stesso modo, Levine, Huttenlocher, Taylor e Langrock (1999) hanno dimostrato che bambini di 4 anni e mezzo sono in grado di eseguire trasformazioni mentali che coinvolgono rotazione e traslazione.

La comparsa precoce della capacità di rotazione mentale può essere messa in relazione con i successi ottenuti facendo utilizzare mappe a bambini in età prescolare. Dando mappe semplici a bambini di 4 anni e 3 anni è possibile far ritrovare loro un oggetto nascosto in una scatola di sabbia; con l'ausilio di mappe, bambini tra i 3 e i 5 anni e mezzo hanno ritrovato un giocattolo nascosto in una stanza e bambini di 5 e 6 anni si sono mossi, con criteri, per i corridoi di una scuola sconosciuta. Per riuscire in questi compiti, i bambini devono riconoscere la corrispondenza tra la mappa e lo spazio reale di forma simile, la riduzione in scala ed effettuare la rotazione mentale della mappa rispetto allo spazio reale. Il successo nell'uso di mappe tra bambini in età prescolare si è ottenuto quando le mappe erano orientate nel modo giusto rispetto allo spazio e la rotazione mentale è stata limitata al piano verticale.

**Apprendimento dei Termini Spaziali: Relazione con le Capacità Spaziali Matematiche**

Quindi i neonati usano precocemente categorie spaziali. Queste categorie visive possono gettare le basi per il successivo apprendimento di termini spaziali, volti ad etichettare queste categorie. Tuttavia, è anche possibile che l'uso del linguaggio guidi l'apprendimento dei concetti spaziali, mettendone in evidenza alcuni pre-verbali e non altri, magari formandone di nuovi.

L'esposizione al linguaggio spaziale durante esperienze spaziali sembra anche essere particolarmente utile nell' " apprendimento e mantenimento [dei concetti spaziali]… invitando i bambini a memorizzare l'informazione e la sua etichetta" (Gentner, 2003, pp 207-208). Gentner ha osservato che i bambini che ascoltavano specifiche etichette spaziali nel corso di un esperimento di laboratorio che coinvolgeva oggetti nascosti ("sto mettendo questo su/in/sotto la casella") erano maggiormente in grado di trovare gli oggetti rispetto ai bambini che ascoltavano un riferimento generico della posizione ("sto mettendo questo qui").

Risultati del genere sono stati osservati anche per bambini i cui genitori nel leggere una storia illustrata, con specifiche indicazioni su forme e posizioni, invitavano continuamente i bambini ad osservarne le immagini. (Szechter e Liben, 2004)

**Comprensione di Forme Geometriche e di Composizione di Forme**

Piaget e Inhelder (1967) hanno proposto un'evoluzione dello sviluppo in cui i bambini prima discriminano gli oggetti sulla base di caratteristiche topologiche (ad esempio, una forma chiusa, che ha uno spazio interno definito dal contorno chiuso, rispetto ad una forma aperta, che non ha un interno definito o confini esterni) e solo successivamente sulla base di caratteristiche euclidee. Più tardi ancora, secondo questa teoria, i bambini sono in grado di discriminare le forme rettilinee (ad esempio, quadrati e diamanti).

Un quadro diverso viene proposto da van Hiele (1986), che sostiene che i bambini innanzitutto individuano forme a livello visivo, sulla base del loro aspetto, poi rappresentano le forme a livello "descrittivo" sulla base delle loro proprietà e, infine, procedono verso un tipo più formale di pensiero geometrico che si basa sulla capacità di ragionamento logico.

Secondo questa successione di sviluppo, in età prescolare i bambini hanno categorie organizzate attorno a degli esempi rappresentativi, prototipi, sicché quando un esemplare di forma gli appare relativamente somigliante al prototipo, in un numero ragionevole di aspetti, allora lo riconoscono come membro di quella categoria. Per esempio, in età prescolare i bambini non riconoscono nella categoria "triangolo" un triangolo rovesciato o uno che non sia isoscele (ad esempio, Clements et al., 1999). Inoltre, tendono a considerare i quadrati come una categoria distinta e non come un particolare tipo di rettangolo con quattro lati uguali (Clements et al., 1999).

Altre volte estendono l'etichetta "rettangolo" a trapezi rettangoli così come a parallelogrammi non rettangolari che hanno due lati che sono molto più lunghi rispetto agli altri due.

Negli anni della scuola elementare, la categorizzazione delle forme per i bambini incorpora una conoscenza più profonda delle regole e delle teorie che le definiscono (Burger e Shaughnessy, 1986; Satlow e Newcombe, 1998). Il tempo in cui avviene il passaggio dall'affidarsi alle caratteristiche percettive all'affidarsi a quelle definitorie, dipende dalla forma. Per esempio, per quanto riguarda i cerchi e i rettangoli, questo cambiamento si verifica tra i 3 e 5 anni, (Satlow e Newcombe), per i triangoli avviene prima della seconda elementare, e per i pentagoni durante la seconda elementare. Durante l'età prescolare, il principale cambiamento nel categorizzare le forme è una crescente tendenza ad accettare esemplari atipici di forme come membri della categoria – cioè, estendere le categorie al di là di forme prototipo (Burger e Shaughnessy, 1986; Usiskin, 1987).

Anche l'apprendimento di specifici termini spaziali aiuta i bambini ad evidenziare le categorie spaziali: mediante le parole che indicano la forma (*cerchio, quadrato, triangolo, rettangolo*), così come quelle che descrivono le caratteristiche spaziali (*curva, retta, linea, lato, angolo, spigolo*), quelle per le dimensioni spaziali (*grande, piccolo, alto, basso, largo, stretto*) o per le relazioni spaziali (*davanti, dietro, accanto, fra, sopra, sotto*).

**Lo Sviluppo della Misura**

La *misura* è un aspetto fondamentale della matematica, perché ne collega due aree principali, la geometria e il numero, attraverso il collegamento del numero alle dimensioni spaziali.

Lo sviluppo delle competenze sulla misura di solito inizia direttamente con il confronto di oggetti lungo una sola dimensione: i bambini riescono, generalmente, a misurare lunghezze prima di superfici e volumi. La capacità di confrontare direttamente le lunghezze degli oggetti emerge molto presto e sembra inizialmente essere basata sulla percezione. I neonati dimostrano consapevolezza della variazione di quantità in una dimensione: già a 6 mesi possono discriminare due oggetti sulla base della loro altezza. Neonati di 6 mesi e bambini di 2 anni sono in grado di discriminare la lunghezza di tasselli quando compaiono allineati in presenza di uno standard costante, ma non quando manca uno standard con cui confrontarli.

La capacità di discriminare le lunghezze in modo più preciso (distinguendo due altezze abbastanza vicine, senza che sia presente uno standard allineato) si sviluppa in un periodo fra i 2 e i 4 anni. Tuttavia, anche dai 4 anni, la sensibilità dei bambini alle variazioni nelle dimensioni è spesso influenzata dal confronto tra due oggetti.