Università degli Studi di Napoli “Federico II”

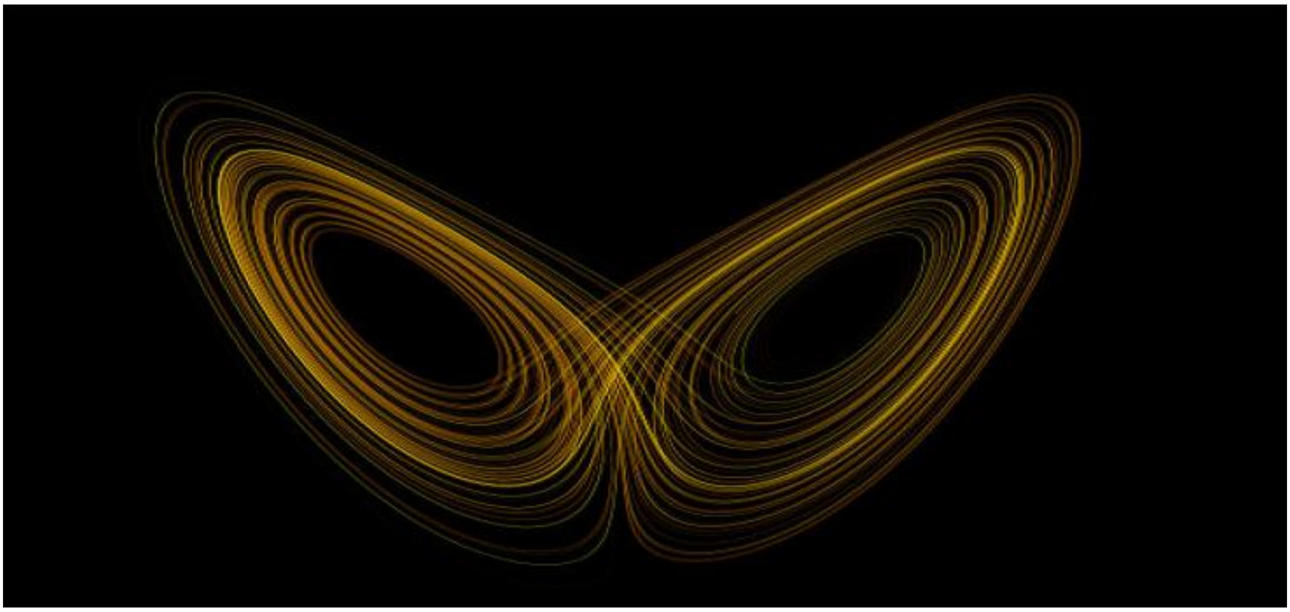
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Esame in Didattica della Fisica

Insegnare l’indeterminismo: una proposta didattica e una riflessione



Tutor:
Prof. Emilio Balzano

Studente:
Arcangelo Barbato matr. N94000334

A.A. 2016/2017

INDICE DEI CONTENUTI

INTRODUZIONE

Nel presente lavoro illustrerò un percorso didattico finalizzato all'insegnamento, a livelli scolastici diversi, dell'indeterminismo (caotico, statistico e quantistico), argomento di innegabile importanza per l'interpretazione corretta della realtà fisica, che viene tuttavia spesso trascurato, talvolta perché tralasciato anche nel percorso di formazione degli insegnanti stessi [1][2].

Partendo dalla mia esperienza di studente universitario, e prima ancora da personali interessi (comuni di certo a gran parte degli esseri umani, in modo più o meno consapevole) riguardanti tematiche filosofiche quali il libero arbitrio, il finalismo, il fatalismo, intendo sottolineare non solo l'impatto fondamentale che questi argomenti possono avere sul sentire quotidiano di ogni singolo individuo, quale che sia la sua età o la sua condizione personale o professionale; ma anche l'importanza che la probabilità e l'indeterminismo hanno nello sviluppo del pensiero formale e nella comprensione di altri argomenti scientifici (la misura, il comportamento dei sistemi complessi, le previsioni).

Nel primo capitolo, si tratta l'indeterminismo, con riferimenti ai modelli fisici, al modo in cui viene attualmente insegnato e può essere insegnato, alle difficoltà che può presentare agli studenti, e alla sua rilevanza scientifica, per sottolineare il fatto che l'indeterminismo *rinuncia alla concezione riduzionista per adottare un punto di vista globale, che considera le proprietà di un sistema complesso come aspetti reciprocamente connessi di una unica totalità auto consistente da comprendere nella sua integrità*[34].

Nel secondo capitolo, si analizza in dettaglio la proposta didattica, e nel terzo si consigliano alcuni quesiti da poter porre agli studenti, ed alcune osservazioni relative a questo e ad altri lavori in letteratura.

I percorsi didattici qui individuati sono rivolti ad insegnanti di studenti di tutte le età: esistono degli elementi fondamentali, nella trattazione dell'indeterminismo, che possono essere introdotti ad ogni studente, ovviamente con specifici livelli di complessità.

In particolare, per l'insegnamento a livello universitario, ritengo che sia molto efficace il metodo "classico" di insegnamento che fa ricorso al formalismo matematico senza mezzi termini (Lo spazio delle fasi per comprendere il moto, la probabilità assiomatica per introdurre la statistica, la meccanica quantistica per spiegare l'indeterminismo quantistico), a patto che non si trascuri di sottolineare l'importanza (e la bellezza) di aspetti semplici (il determinismo nascosto nel caos, la prevedibilità statistica dei fenomeni stocastici, la distribuzione poissoniana ricostruita utilizzando il triangolo di Tartaglia) che possono risultare davvero illuminanti perfino agli studenti universitari, anch'essi talvolta lasciati troppo soli a sé stessi. A questo proposito, ho descritto in Cap. II.3 i modelli matematici ai quali mi riferisco, con l'aggiunta di un breve ma necessario formalismo.

Sottolineo che l'aspetto matematico non è qui centrale: le difficoltà riscontrate nell'apprendimento dell'indeterminismo derivano soprattutto da errori concettuali e interpretativi, che possono essere corretti con semplici esperimenti qualitativi. Tuttavia, la matematica rimane la "parola principe" con la quale esprimere la fisica. *La matematica è capace di entrare "in risonanza" con il mondo fisico soprattutto perché esso è organizzato in forme che sono essenzialmente strutture matematiche. L'oggetto di un'osservazione, di un esperimento, anche se talvolta ciò ci sfugge, ha una sua struttura e grazie alla modellizzazione fisica e matematica riusciamo a rappresentarcelo in modo più o meno soddisfacente. Senza che si perda il carattere di*

scientificità e rigore quindi non dovremmo ridurre le scienze all'ambito sperimentale e quindi solo al quantitativo e al predittivo ma dovremmo valorizzare l'aspetto descrittivo e qualitativo al fine di privilegiarne la capacità di rendere intelligibili gli oggetti e di teorizzare[33]. E ancora: *La matematica è un modo di ragionare con una consistenza interna. Ma il rigore, i criteri di coerenza, la consistenza interna e l'eleganza che possono caratterizzare risultati formali non possono essere costruiti a priori, insegnanti prima in modo esemplare. Piuttosto sono legate allo sviluppo di competenze logico-linguistiche che occorre costruire con metodo con strategie metacognitive.*
Laddove è prematura, o insufficiente, la competenza logico-linguistica, l'uso ausiliario del discorso qualitativo può risultare perciò molto efficace.
Perché è importante l'indeterminismo? Perché ritengo che sia una di quelle tematiche che possono realmente contribuire a sanare una frattura esistente tra *due tendenze solo apparentemente contrapposte, che in realtà rappresentano due facce della stessa medaglia. Da una parte vedo uno scientismo ingenuo che nega la rilevanza di temi, come quelli etici ed epistemologici, non affrontabili con i soli metodi scientifici (ma che non possono neppure essere affrontati ignorando gli strumenti conoscitivi forniti dalla scienza). Dall'altra, un diffuso atteggiamento anti-scientifico. Questo, più che di teorizzazioni esplicite, vive del dilagare dell'ignoranza in materia scientifica, spesso esibita quasi con compiacimento. Mi piacerebbe pensare a un "nuovo umanesimo" che superasse questa contrapposizione recuperando, nell'ambito di una cultura unitaria, un pensiero scientifico critico. Ma non si tratterebbe certo di un umanesimo in conflitto con la scienza*[35].
Se la scienza è nata per capire e prevedere, continuo a ritenere ingiustificata, nei percorsi di formazione degli studenti (soprattutto più giovani), l'assenza di una vera riflessione sulla natura di queste previsioni, e dunque della scienza in sé, e sull'esistenza in uno sguardo d'insieme.
Ritengo che insegnare l'indeterminismo abbia delle enormi potenzialità in termini di impatto emotivo e autocosciente, che può di certo favorirne l'insegnamento, ma anche in termini di educazione al pensiero teoretico e alla consapevolezza scientifica non solo dei futuri scienziati, ma anche di tutti i futuri cittadini del mondo.

Arcangelo Barbato

CAPITOLO I: LE BASI TEORICHE E IL CONTESTO

In questo capitolo, dopo una premessa contenente una riflessione iniziale frutto della mia esperienza personale, viene introdotto l'indeterminismo dal punto di vista fisico, per poi spiegare perché ritengo necessario il suo insegnamento fin dai primi anni di scuola. Dopo una descrizione del modello fisico e didattico di riferimento, che ha lo scopo di individuare miratamente l'oggetto dell'insegnamento e coloro ai quali è rivolto, si analizzano i contesti di apprendimento con riferimento ad alcuni studi di didattica condotti a questo proposito.

1. Premessa

La scoperta dell'indeterminismo può essere un terremoto nella vita mentale di un individuo. Personalmente, dopo gli studi, piuttosto impegnativi, che mi hanno portato alla maturità scientifica, ciò che sapevo era non più dell'esistenza della parola Caos, mutuata probabilmente dall'ambito letterario, più che scientifico. Sapevo, certo, che alcuni fisici si occupavano della nuova "Scienza del Caos", ma credevo che ciò riguardasse sistemi che ritenevo "complicati" in un modo indefinito, quali le nuvole, i flussi d'acqua, i flipper delle sale-gioco. Avevo già una vaga idea dei limiti della scienza nello studiare e prevedere questi fenomeni. Ma ritenevo fosse un limite di tipo epistemico, legato alle troppe variabili in gioco.

Forte di influenze filosofiche di stampo hegeliano, ero un convinto determinista (non per scelta, ma solo per conseguenza. Non avevo, ripeto, un'idea formale del concetto di indeterminismo). Come Laplace (seppi in seguito), ritenevo che a un immenso computer capace di elaborare i dati relativi alle innumerevoli variabili di interesse, nulla del futuro sarebbe risultato incerto. Questa era la mia naturale intuizione sui fatti. Come potevo, del resto, pensarla diversamente? I ragazzi che vogliono prendere le distanze dai dogmi trasmessi, spesso di stampo religioso e finalista, e dalle verità imposte di altro tipo, tendono per reazione ad assumere un atteggiamento di estremismo positivista e meccanicista che, se da un lato, è un'eredità delle rivoluzioni scientifiche passate, dall'altro costituisce una grave occasione di errore, se non accompagnato da uno spirito critico e da intuizioni più generali, alla luce delle conoscenze attuali sulla natura delle cose.

Non immaginavo che alcuni fenomeni (quali quelli atmosferici) fossero intrinsecamente imprevedibili, e che altri (quali quelli stocastici) fossero intrinsecamente probabilistici.

All'università, il trauma è stato inevitabile. Ho incontrato la meccanica statistica, la meccanica quantistica, i sistemi complessi.

Ma devo ammettere che, se non fosse stato per letture indipendenti e per il mio forte interesse verso questa tematica, molti degli aspetti interessanti (puramente scientifici ma anche esistenzialistici) di questi argomenti mi sarebbero risultati poco chiari. A parte qualche piccolo cenno ricevuto, ritengo che non fosse stato approfondito a sufficienza il significato del caos deterministico, dell'indeterminismo, o delle ripercussioni ontologiche che alcune formulazioni della meccanica quantistica possono avere. Inoltre, tali argomenti diversi, strettamente correlati, non mi sono mai stati presentati in maniera organica e unitaria, così da rafforzare la visione d'insieme sui comportamenti diversi dei fenomeni dello stesso universo fisico.

Ritengo francamente assurdo che un tema così essenziale (intendo cioè che riguarda *l'essenza* delle cose) sia appannaggio di pochi indirizzi di specializzazione in Fisica, e addirittura ritengo assurdo che sia appannaggio dei soli corsi universitari.

2. Che cos'è l'indeterminismo, e perché insegnarlo

L'insegnamento della fisica è perlopiù centrato su fenomeni puramente deterministici, che si possono cioè prevedere in modo indefinito nel tempo futuro, se è nota una legge che ne descrive l'evoluzione temporale (e la condizione iniziale del sistema fisico in esame). In effetti, la meccanica classica, che si occupa di sistemi lineari, per sua natura meccanicistica e riduzionistica, si basa sul concetto di *casualità forte*: simili cause hanno simili effetti.
Anche per i sistemi deterministici, tuttavia, non è sempre possibile fare previsioni deterministiche. Per esempio, In un sistema composto di un numero molto grande di particelle, come quelle che compongono un gas, è assurdo pensare di applicare le leggi del moto (e la dinamica degli urti) a ciascuna di esse indipendentemente. E' assurdo anche solo pensare di determinare una condizione iniziale microscopica del sistema. Ciò che si può fare, in questo caso, è un affronto del problema in termini statistici, cioè uno studio globale del "comportamento medio" delle particelle del sistema. La "meccanica statistica" è così in grado di dare informazioni esatte inerenti alla "probabilità" che una particella si trovi in una certa regione, con una velocità compresa fra certi valori (Si consideri per esempio la nota Distribuzione di Maxwell-Boltzmann). Nasce in questo modo, nell'ambito di una meccanica deterministica come la meccanica classica, un'"indeterminazione" sulla conoscenza della posizione e della velocità della particella singola, che è di natura statistica, dovuta ad un'impossibilità pratica ("epistemica") di indagine e di calcolo completa. Si parla in questo caso di "**indeterminismo statistico**".
L'indeterminazione emerge a livello macroscopico, mentre non è presente a livello microscopico. Alla base di una indeterminazione statistica vi è ancora una meccanica deterministica. Va infatti sottolineato ancora che questo tipo di indeterminismo non è insito nelle leggi della meccanica classica, che sono deterministiche, ma deriva dai limiti intrinseci delle capacità conoscitive dell'osservatore. Si potrebbe parlare di un indeterminismo "soggettivo" più che di un indeterminismo "oggettivo".
La scoperta del **caos deterministico** mostra poi che esistono fenomeni non lineari che, nonostante siano deterministici (nonostante siano cioè note le leggi che ne descrivono l'evoluzione temporale), mostrano un comportamento irregolare e imprevedibile se osservati per un certo tempo (il moto dell'atmosfera, per esempio). Il sistema presenta una forte dipendenza dalle condizioni iniziali: una piccola variazione delle condizioni iniziali stesse produce una forte variazione nello stato finale del sistema, osservato dopo un certo tempo. E quindi, dall'impossibilità pratica di conoscere la condizione iniziale con precisione infinita (nessuno strumento di misura fornisce risultati privi di incertezza, cioè numeri di infinite cifre significative), risulterà un'inevitabile e crescente incertezza nella previsione futura dell'evoluzione del sistema.
Citando H. Poincaré: "*Una causa molto piccola, che ci sfugge, determina un effetto considerevole che non possiamo non vedere, e allora diciamo che questo effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo nell'istante iniziale, potremmo predire con la medesima precisione la situazione dell'universo in un istante successivo.*

Ma quand'anche le leggi naturali non avessero più segreti per noi, potremmo conoscere la situazione iniziale solo in modo approssimativo. Se questa approssimazione ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, questo ci basterebbe per poter dire che il fenomeno è stato previsto, che è governato da leggi: ma non è sempre così e può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali generino differenze grandissime nei fenomeni finali; un piccolo errore nelle prime produrrebbe un errore enorme negli ultimi. La predizione diventa allora impossibile e ci troviamo di fronte al fenomeno fortuito." (Poincaré, Science et Mèthode, 1903).

Si parla in questo caso di indeterminazioni deterministiche nella meccanica classica non lineare.

Infine, anche i fenomeno quantistici presentano un certo grado di impredicibilità. L'**indeterminismo quantistico** non è solo dovuto al principio di indeterminazione, per cui è impossibile conoscere con infinita precisione posizione e velocità di una particella, e quindi all'impossibilità pratica (epistemica) di accedere a tutte le informazioni necessarie per la conoscenza deterministica del moto delle particelle; ma, stando all'interpretazione della scuola di Copenhagen, l'indeterminismo quantistico è una "legge di natura", cioè costituisce un'impossibilità "teorica" e intrinseca, e si colloca al livello microscopico del sistema, nel significato fisico della funzione d'onda ψ , dal momento che in essa non sono contenute altro che informazioni sulla probabilità di trovare un sistema in un certo stato.

Va, comunque precisato che, nella meccanica quantistica, la funzione d'onda ψ evolve deterministicamente nel tempo secondo l'equazione di Schrödinger; tuttavia è il suo significato fisico ad essere indeterministico. E ancora è degna di nota l'osservazione dello stesso Max Born sulla necessità di non identificare "causalità" e "determinismo" come ha fatto il meccanicismo. Nella meccanica quantistica «non è la causalità propriamente detta ad essere eliminata, ma soltanto una sua interpretazione tradizionale che la identifica con il determinismo» (*Filosofia naturale della causalità e del caso,* 1982, p. 129). In particolar modo egli sottolinea il fatto che «l'affermazione frequentemente ripetuta , secondo la quale la fisica moderna ha abbandonato la causalità, è del tutto priva di fondamento. È vero che la fisica moderna ha abbandonato e modificato molti concetti tradizionali; tuttavia cesserebbe di essere una scienza se avesse rinunciato a ricercare le cause dei fenomeni».

La necessità dello studio dell'indeterminismo fin dai primi livelli di istruzione, è quindi evidente: senza di essa, si priva gli studenti del diritto di conoscere una parte importante della fisica, e li si espone al rischio di fraintendere la fisica per intero, interpretandola come una scienza sempre e solo deterministica.

Conoscere l'indeterminismo permette inoltre di riflettere sulla natura stessa della conoscenza scientifica e dell'atto di misurazione, su un'idea di causalità più raffinata, sulla probabilità e su questioni epistemologiche di base.

Lo studio dello spazio delle fasi permette di stimolare notevolmente il pensiero teoretico e le capacità astrattive dello studente, mettendolo spesso in contatto con un formalismo non troppo elaborato ma potentissimo, e permettendogli di percepire l'importanza della modellizzazione.

Allo stesso modo, l'uso della macchina di Galton come "generatore di caso" gli consente di separare fenomeno fisico da significato teoretico, di riflettere sulle assonanze concettuali tra fenomeni diversi, e di nuovo sull'impiego di modelli matematici o pratici per spiegare e simulare fenomeni.

L'uso del pendolo magnetico, dall'impatto ludico notevole, cattura tramite la sorpresa l'attenzione dello studente e coltiva l'ambiente emotivo ideale per l'apprendimento.

3. Il modello matematico

In questa sezione, si analizzano i modelli matematici utilizzati per lo studio dei sistemi indeterministici e caotici appena descritti. In generale, lo stato di un sistema fisico è specificato da n gradi di libertà descritti da un vettore n-dimensionale dipendente dal tempo:

$$x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \qquad (1)$$

che si muove in uno spazio astratto *detto spazio delle fasi*.
Per esempio, nel moto di un pendolo semplice, lo stato del sistema è rappresentato da un punto in uno spazio bidimensionale le cui coordinate rappresentano rispettivamente lo spostamento θ angolare dalla posizione di equilibrio e la velocità angolare ω (Fig. 1).

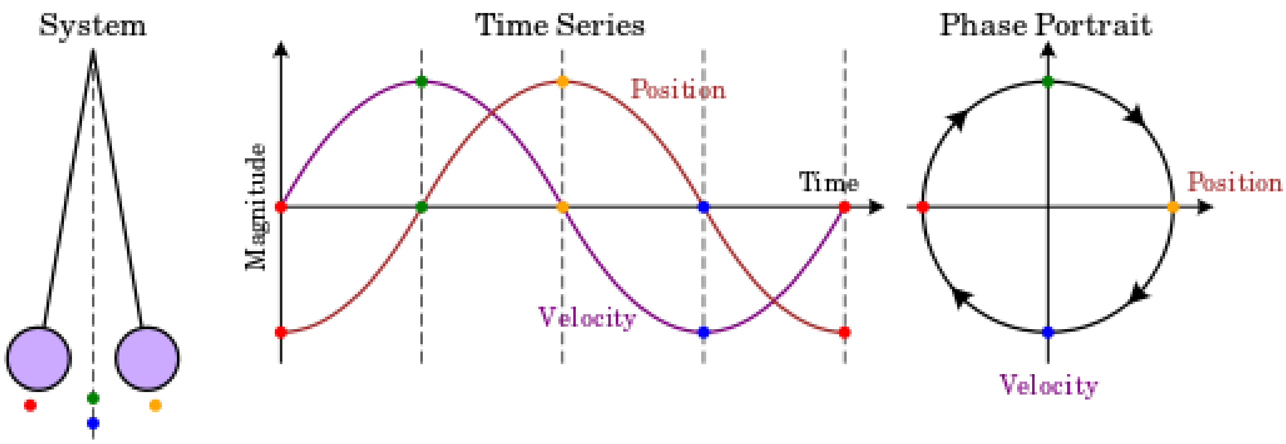


Figura 1. Moto di un pendolo semplice rappresentato nel diagramma spazio-velocità in funzione del tempo e nello spazio delle fasi.

Nel caso di un sistema dinamico continuo, l'evoluzione temporale è descritta da un sistema di n equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) \qquad (2)$$

Con $f_i(x_1, \dots, x_n)$ generiche funzioni lineari, nel caso dei sistemi perciò detti lineari, o non lineari, nel caso per esempio dei sistemi caotici.
La soluzione delle (2) permette di tracciare l'evoluzione temporale del sistema dinamico nello spazio delle fasi, nota una condizione iniziale. A questo punto, un sistema può presentare comportamento deterministico o indeterministico secondo i casi di seguito illustrati.

<u>DETERMINISMO CLASSICO.</u> Tutti i sistemi meccanici classici sono lineari, ossia caratterizzati da funzioni $f_i(x_1, \dots, x_n)$ lineari. In questo caso, è sempre possibile ricavare una soluzione generale del sistema, che risulta deterministico (Si veda ancora l'esempio in Figura 1). Esiste cioè sempre, in linea di principio e in via del tutto generale, la possibilità di determinare in maniera esatta in ogni istante futuro, o passato, del tempo, lo stato del sistema, per esempio la posizione e la velocità del pendolo semplice, qualora si conoscano la legge della forza agente su di esso e le condizioni iniziali, cioè la posizione e la velocità del pendolo in un istante assegnato del tempo.

INDETERMINISMO STATISTICO. Quando però un sistema classico è composto da un numero N di particelle, con N molto grande (dell'ordine del valore della costante di Avogadro, ossia dell'ordine di 10^{23}), bisogna per ovvi motivi rinunciare alla pretesa di risolvere queste equazioni per ciascuna particella. Lo stato futuro del sistema (e in realtà anche il suo stato iniziale) rimane ignoto, per cui il sistema si può considerare indeterministico.

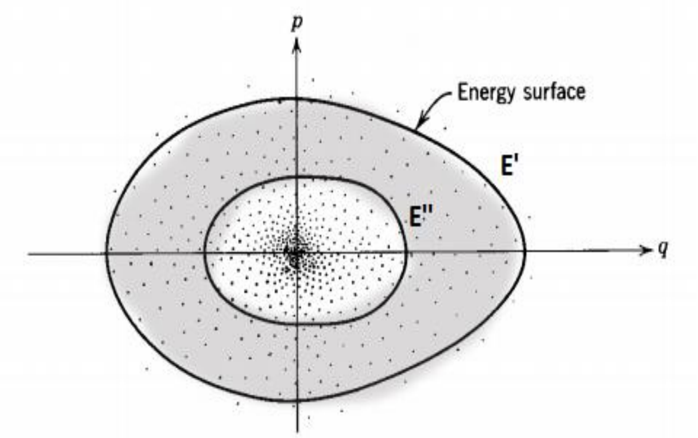


Figura 2. Insieme statistico: insieme di stati microscopici (punti nello spazio delle fasi) che corrispondono ad un sistema macroscopico con energia di valori compresi tra $\mathbf{E}'$ ed $\mathbf{E}''$[21].

Se non si può accertare lo stato del sistema istante per istante, si può però ricorrere alla meccanica statistica per determinare le sue proprietà macroscopiche, per esempio la sua temperatura o la sua energia, considerando un insieme statistico che rappresenta tutte le possibili configurazioni di un sistema e la loro probabilità di verificarsi.

Per esempio, l'insieme microcanonico è l'insieme statistico che descrive i sistemi isolati, cioè quei sistemi che hanno un valore definito di energia (o di temperatura) e numero di particelle. È da notare che le condizioni fissate di energia sono soddisfatte da un numero infinito di stati compatibili con essi, ma microscopicamente diversi: in altre parole, ad una data temperatura di uno stesso gas possono corrispondere infinite configurazioni delle particelle che lo compongono.

Questo significa che possiamo pensare di rappresentare il sistema come un'infinità di copie identiche del sistema ad un certo istante, ognuna delle quali è uno stato compatibile con le condizioni macroscopiche imposte al sistema: questo è quello che si intende per *ensemble di Gibbs* (Fig. 2: ad una certa energia corrisponde una superficie alla quale possono appartenere infiniti sistemi alla stessa energia). L'ensemble è rappresentato da un insieme di punti nello spazio delle fasi (q, p) $6N$-dimensionale, con q insieme di coordinate generalizzate e p insieme dei momenti coniugati. Esso è dunque caratterizzato da una funzione densità $\rho(q, p, t)$ definita in modo che $\rho(q, p, t)d^{3N}q d^{3N}p$ rappresenti il numero dei punti rappresentativi del sistema contenuti nel volume infinitesimo dello spazio delle fasi $d^{3N}q d^{3N}p$ all'istante t. Lo stato del sistema può cioè essere dato solo macroscopicamente, e in termini statistici.

Indeterminismo caotico. Si definiscono sistemi dinamici caotici quelli per i quali è intrinsecamente imprevedibile il comportamento dopo intervalli di tempo relativamente brevi, nonostante i sistemi siano di per sé deterministici (cioè descritti da equazioni ben definite). Da un punto di vista matematico, una caratteristica di questi sistemi è il fatto che la loro evoluzione temporale è descritta da equazioni differenziali non lineari (condizione necessaria non sufficiente). Da un punto di vista fisico, i sistemi caotici presentano un'estrema sensibilità alle condizioni iniziali (*effetto farfalla*), mostrano cioè evoluzioni temporali notevolmente differenti a partire da una piccola variazione delle condizioni iniziali. Il caos è l'esistenza di una linea di confine di prevedibilità dei sistemi (orizzonte di prevedibilità) oltre la quale non è possibile conoscere la reazione del sistema stesso.

Un esempio di sistema di questo tipo è il pendolo caotico, descritto in dettaglio nel secondo capitolo. Un altro esempio è un tipico sistema meteorologico. L'aleatorietà del sistema risulta chiara non appena si prova a simulare il modello mediante il calcolatore: le perturbazioni microscopiche, o piccole differenze nelle condizioni iniziali, vengono infatti amplificate in un tempo brevissimo fino a interferire con il comportamento macroscopico del sistema. Dopo un iniziale transitorio, la soluzione del sistema mostra oscillazioni irregolari e non periodiche. Se si rappresenta la traiettoria, in un piano bidimensionale dello spazio delle fasi, essa mostra una struttura a forma di farfalla (attrattore caotico o strano o di Lorenz) e sembra che essa ripassi ripetute volte dallo stesso punto, ma se invece si visualizza in uno spazio tridimensionale appare evidente che essa non ripassa mai dallo stesso punto (Fig. 3).
Un attrattore è una regione finita dello spazio delle fasi che attrae asintoticamente tutte le traiettorie contenute nel cosiddetto bacino di attrazione, ed è detto attrattore caotico quando presenta sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali: punti arbitrariamente vicini inizialmente, diventano macroscopicamente separati sull'attrattore dopo tempo sufficientemente lunghi.

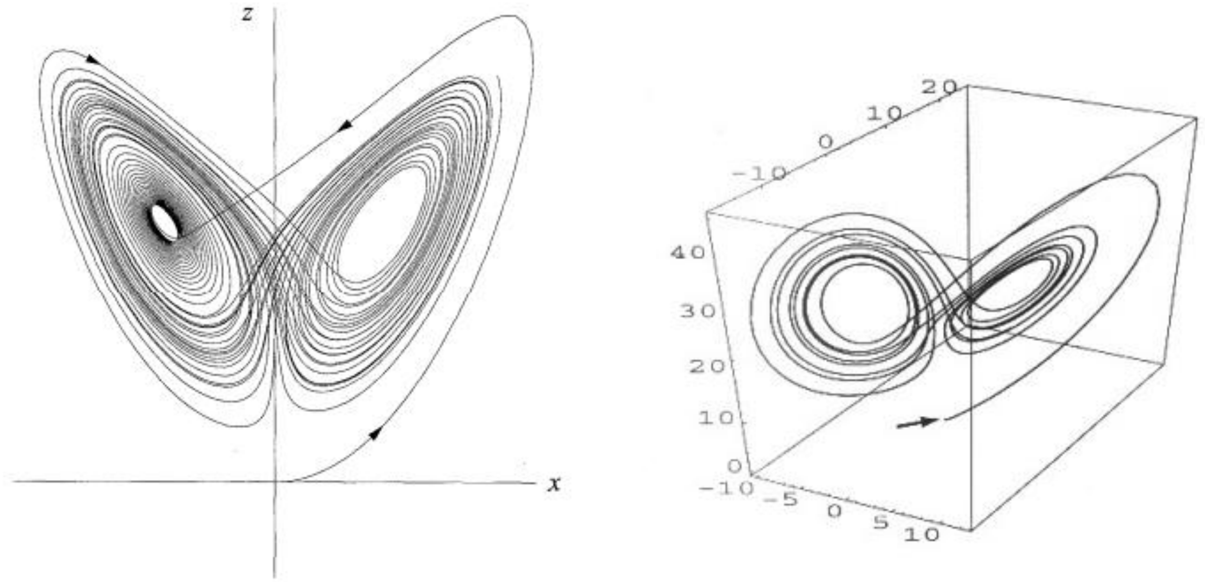


Figura 3. Attrattore caotico o di Lorenz, che rappresenta l'evoluzione di un sistema caotico nello spazio delle fasi.

<u>INDETERMINISMO QUANTISTICO</u>. I sistemi quantistici sono descritti da una funzione d'onda Ψ che soddisfa l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \qquad (3)$$

Dove i è l'unità immaginaria, $\hbar$ la costante di Planck ridotta e H l'operatore hamiltoniano.
Ψ è una funzione complessa delle coordinate spaziali e del tempo e il suo significato è quello di un'ampiezza di probabilità, ovvero il suo modulo quadro rappresenta la densità di probabilità dello stato sulle posizioni.
Gli autovalori dell'operatore H, invece, rappresentano i valori possibili dell'energia del sistema.
La misura in meccanica quantistica è un concetto prettamente probabilistico: misurare un'osservabile del sistema, per esempio la sua energia, perturba il sistema stesso, quindi a priori

non si conosce il valore di un'osservabile fino a che essa non viene misurata: il processo di misura fa *decadere* il sistema in un autostato dell'osservabile (e quindi della variabile dinamica) che si misura: questo fatto ha implicazioni molto profonde che va sotto il nome di collasso della funzione d'onda che è a sua volta l'aspetto caratteristico della cosiddetta e celebre interpretazione di Copenaghen. Qui risiede l'essenza dell'indeterminismo quantistico (Fig. 4).

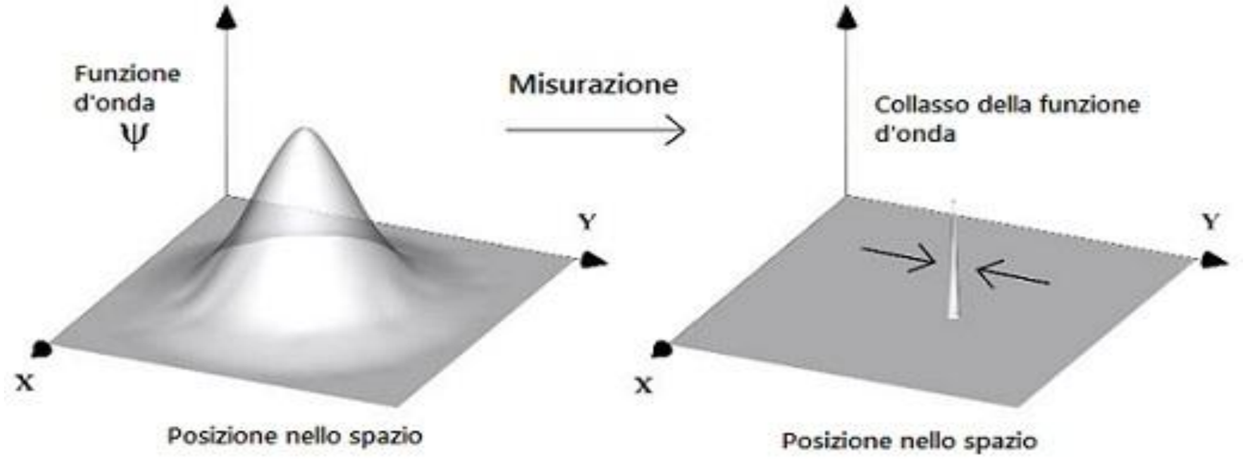


Figura 4. Lo stato di una particella quantistica è descritto da una funzione d'onda che contiene le informazioni sulla probabilità di trovare la particella in una data posizione. Dopo una misura, la funzione d'onda collassa in un autostato del sistema, e la posizione della particelle è determinata e stabile.

Se rimaniamo nell'ambito dell'interpretazione di Copenhagen della funzione d'onda, che è l'interpretazione della meccanica quantistica "ortodossa" ma che ha il difetto di non spiegare cosa provoca il collasso, la contrazione del pacchetto d'onda è un evento provocato da qualunque interazione che sia riconducibile ad un'operazione di misura. Non è un processo strettamente fisico, ma un'evoluzione, di fatto istantanea, della descrizione matematica del sistema fisico (si ricorda che la funzione d'onda non è una grandezza fisica).
I dettagli matematici della meccanica quantistica, così come Il dualismo onda-corpuscolo e le diverse ripercussioni ontologiche della meccanica quantistica (circa il ruolo dell'osservatore e il collasso della funzione d'onda) esulano dagli scopi del presente lavoro: molti approcci innovativi sono stati proposti per insegnare nello specifico la fisica moderna e la meccanica quantistica a studenti non universitari ([3][4]). Ciò che si ritiene interessante in questo elaborato, è sottolineare l'essenza intrinsecamente probabilistica della meccanica quantistica ai fini del rafforzamento del concetto di indeterminismo.

Nota sui processi stocastici. Un processo casuale è anche detto stocastico. Da un punto di vista matematico, un processo stocastico è rappresentato da una variabile il cui valore varia nel tempo in modo casuale e con certe peculiarità. Facendo delle prove (o osservazioni) ripetute dello stesso processo, si ottengono diversi andamenti nel tempo della variabile (realizzazioni del processo), con un eventuale valore medio della stessa. Un esempio è la misura di una grandezza fisica: il suo risultato, se lo strumento utilizzato è sufficientemente sensibile, varia in modo casuale. Risultati di misure ripetute presentano una distribuzione di valori il cui valor medio è assunto come miglior rappresentante del valore vero della grandezza (Fig. 5). In questo caso, l'indeterminismo è dovuto alla mancata conoscenza delle moltissime fonti di errore casuale presenti in ogni processo di misura. È un indeterminismo di tipo epistemico e statistico.

Un altro esempio importante è quello del decadimento radioattivo, alla cui origine vi sono fenomeni di natura quantistica, e dunque quantisticamente indeterministici: non si può prevedere quando un singolo nuclide, in un campione radioattivo composto da moltissimi atomi, decade. Ma si può prevedere con straordinaria accuratezza il numero totale di atomi nel campione decaduti dopo un certo tempo. Dato un numero iniziale di atomi N_0 e la probabilità λ che un singolo atomo decada, il numero di atomi non decaduti al tempo t è dato dalla legge del decadimento radioattivo (Fig. 6):

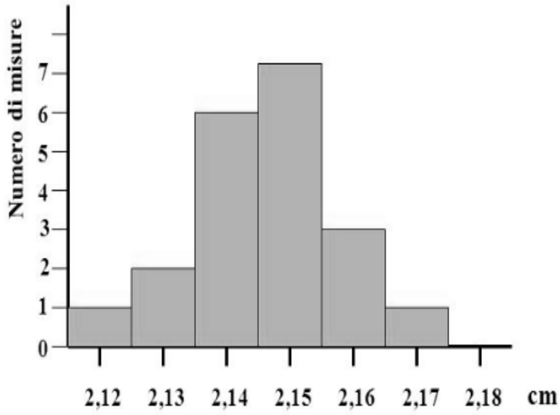


Figura 5. Istogramma di frequenza per i risultati di diverse misure di una stessa grandezza fisica (in questo esempio una lunghezza).

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (4)$$

Paradossalmente, il caso si dimostra cioè, in un certo specifico senso che si potrebbe definire globale, perfettamente prevedibile.

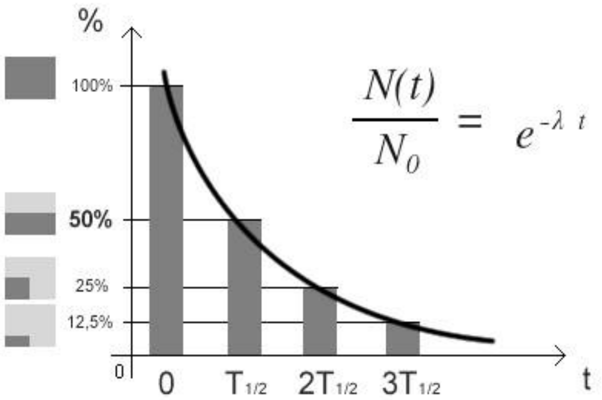


Figura 6. Legge del decadimento radioattivo.

4. L'importanza delle parole: causa e caos, causa e caso.

In qualunque disciplina che insegue il vero, dalla filosofia alla fisica, l'uso consapevole delle parole è fondamentale, nella misura in cui il loro uso leggero o inconsapevole può nascondere forti incomprensioni o fraintendimenti, oltre che indurli in chi ascolta. La scelta delle parole presuppone l'esistenza di ipotesi, di definizioni operative, oltre che l'esistenza di un significato lessicale utile, ed è fondamentale far riflettere i ragazzi sul perché e sul come usare correttamente termini scientifici. Quando, per esempio, un fisico utilizza l'aggettivo "preciso", ha spesso in mente un significato statistico ben definito del termine, di carattere perlopiù quantitativo, più che qualitativo: un risultato è più preciso di un altro quando presenta una fluttuazione statistica minore, fluttuazione dunque quantificabile.
Detto ciò, occorre far riflettere sulle differenze di significato tra termini centrali nello studio dell'indeterminismo. Come già accennato nella premessa del primo capitolo, l'indeterminismo non è anticausale: senza causa non potrebbe esistere scienza, che si basa sul tacito assunto che ogni

fenomeno in natura abbia una causa. La presenza di indeterminismo in un sistema non elimina queste cause, ma soltanto la possibilità di fare previsioni a breve o lungo termine.
Quando un fenomeno non si può prevedere, nonostante sia un fenomeno di tipo *causale*, si dice allora che il risultato dell'osservazione del fenomeno stesso è *casuale*, si presenta cioè casualmente, in modo imprevedibile.
Citando Ian Stewart in: "Che forma ha un fiocco di neve?": *"Il caos è casualità apparente con una causa puramente deterministica. E' un comportamento sregolato governato per intero da regole. Il caos abita nella zona di penombra tra regolarità e casualità. [...] Per certi versi, nel caos vi è un'autentica casualità. In termini approssimativi, si può dire che le regole di un sistema caotico si attaccano alla microscopica casualità delle condizioni iniziali e la amplificano rendendola evidente nel comportamento su larga scala."*

5. Il modello didattico

La teoria dell'apprendimento a cui fa riferimento questo lavoro è socio-costruttivista, ossia una sintesi [5] del modello di costruttivismo interazionista di Jean Piaget e David Paul Ausubel e del modello costruttivista socio-culturale di Lev Vygotskij e Alexis Nikolaevich Leontiev.
Il costruttivismo nasce da una proposta di Jerome Bruner (1966), di carattere positivista, secondo cui la conoscenza è il prodotto di una costruzione attiva del soggetto attraverso l'interazione con l'ambiente: il ruolo dell'insegnante non è solo quello di trasmettere informazioni, ma piuttosto quello di riprodurre le condizioni che possono facilitare il processo di costruzione individuale delle conoscenze da parte dello studente.
Per Piaget, l'apprendimento è una risposta cognitiva e adattiva, che consiste nella modifica di schemi preesistenti che risultano inadeguati alla nuova realtà esterna. L'apprendimento può avvenire per semplice assimilazione, che spesso implica il tentativo di comprendere qualcosa di nuovo utilizzando le conoscenze già possedute, e in alcuni casi una distorsione della nuova informazione al fine di adattarla agli schemi preesistenti. Laddove la nuova informazione non può essere assimilata negli schemi preesistenti, si verifica uno squilibrio. In questo caso è necessaria una modifica più sostanziale degli schemi; ciò implica una riorganizzazione delle strutture mentali attraverso il processo di accomodamento.

Figura 7. Jean Piaget.

Secondo Vygotskij (1978), invece, l'apprendimento deriva direttamente dalle interazioni sociali. Uno dei concetti fondamentali introdotti da Vygotskij è la nozione di Zona di Sviluppo Prossimale (Zone of Proximal Development, ZPD, Fig. 8). Nelle parole di Vygotskij: *"La Zona di Sviluppo Prossimale è la distanza tra l'effettivo livello di sviluppo, determinato tramite la risoluzione autonoma di un problema, ed il livello potenziale di sviluppo, determinato attraverso la risoluzione di un problema sotto la guida di un adulto o di pari più capaci."*

In termini più semplici, la ZPD è la zona che separa le conoscenze che uno studente ha già da quelle che dovrà apprendere. Se, in relazione a un dato compito, lo studente si trova all'interno della ZPD, egli riuscirà ad eseguire il compito con l'assistenza di un istruttore e, successivamente, ad internalizzarlo.
Un ottimo spunto per questo lavoro è stato dato dalla lettura delle leggi dell'apprendimento formulate da Edward L. Thorndike, secondo cui lo studente apprende meglio se motivato, se pratica esercizio, se stimolato emotivamente e sensorialmente, se non si annoia. Inoltre, secondo questo modello, si ricordano meglio le cose imparate più di recente, e al tempo stesso quelle imparate per prime (effetto di prossimità e priorità).

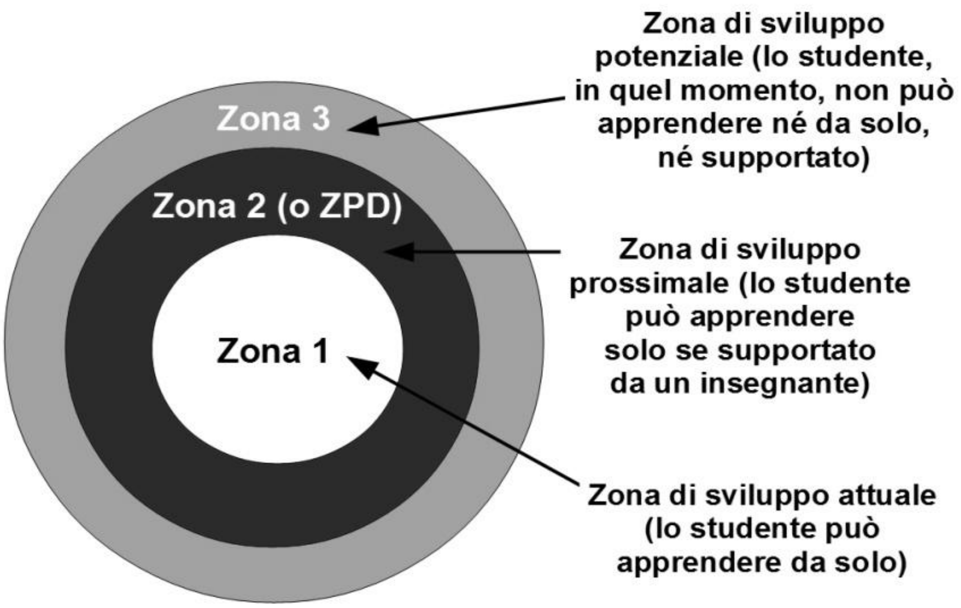


Figura 8. Zona di sviluppo prossimale nel modello costruttivista socio-culturale di Vygotskij.

6. Ambienti e contesti, modalità e materiali.

I percorsi che verranno proposti nel secondo capitolo sono rivolti ad ogni tipo di studente visto che, come discusso in fase introduttiva, si può ritenere necessario trasmettere ad ogni livello scolastico argomenti che riguardano i fondamenti stessi della scienza, e che raramente trovano posto nei programmi didattici ufficiali.
Come viene trattato l'indeterminismo nella scuola? Bisogna ammettere che di norma non viene trattato. La scienza viene trasmessa come un deterministico apparato di leggi, spesso *date* per giunta in modo acritico.

Attualmente, in quasi tutti i curricoli scolastici sono previsti elementi di fisica moderna[15], ma perlopiù incentrati sulla crisi della fisica classica, sull'introduzione del concetto di quanto, sul dualismo onda-corpuscolo.
Nonostante ciò, sono molte le pubblicazioni riguardanti lavori di didattica del caos deterministico ([6],[7],[8],[9],[10],[12],[13]), dalle quali emergono grandi differenze individuali nel processo di apprendimento dei sistemi caotici in studenti dai 15 anni in su, e alcune difficoltà di cui si discuterà in seguito. A questo proposito, risulta utile l'intervento da parte dell'insegnante, o la stimolazione di ragionamenti di tipo analogico (cfr. Cap. II).
D'altro canto, le nuove disposizioni sull'istruzione secondaria di secondo grado hanno generalizzato a tutte le tipologie di scuole superiori l'insegnamento di statistica e probabilità, nell'ambito dell'insegnamento di matematica [2] completando così il percorso curricolare verticale dalla primaria alla secondaria di secondo grado. Tuttavia, raramente la statistica viene associata all'esplorazione del tema dell'indeterminismo. Perlopiù, nella scuola italiana manca una vera tradizione dell'insegnamento di statistica e probabilità, e gli insegnanti stessi sono spesso impreparati all'argomento non solo dal punto di vista didattico[16], e di conseguenza mal disposti verso di esso, e dunque poco motivati a trasmetterlo.
La statistica e la probabilità sono troppo importanti per qualunque scienza, per essere trascurate, e dunque la prima esigenza è invertire la tendenza intervenendo sulla formazione dei docenti.

I percorsi che esporrò a breve prevedono una risposta interattiva costante da parte degli studenti, per far emergere le difficoltà nell'apprendimento e osservare i modelli spontanei che li caratterizzano. Una piccolo riscontro di ricerca sarà fornito nel terzo capitolo, a conclusione del quale si proverà a rispondere a queste domande, insieme ad un confronto con risultati di altri lavori.
Di certo, si può prevedere una difficoltà, da parte degli studenti, nell'affrontare temi così nuovi e talvolta stravolgenti. Tuttavia, gli studenti molto giovani dimostrano di possedere già, per esempio, l'intuizione di evento probabilistico [16]. Si può immaginare per esempio che la difficoltà vera potrebbe risiedere nella formalizzazione e nella modellizzazione di queste intuizioni. Tutto ciò verrà approfondito a conclusione del capitolo III.
Le proposte non prevedono un particolare ambiente didattico privilegiato: possono essere condotte già in aula (contesto formale) con materiali semplici e supporti di facile costruzione, ma che richiedono un'attenta preparazione (una tantum) precedente la sessione didattica; in contesti informali quali musei e banchi dimostrativi, o addirittura nell'ambiente domestico, laddove uno studente, per curiosità propria o su richiesta dell'insegnante, possa per esempio decidere di costruire un pendolo caotico, magari con l'aiuto dei genitori.
Ovviamente, forse è superfluo ricordare i numerosi studi che confermano l'importanza dell'impatto emotivo che esercita l'insegnante, non solo con il suo comportamento, ma anche con il suo *atteggiamento*. "*Sembra quindi largamente condivisibile l'idea che gli aspetti meta- ed extra-cognitivi influenzino la qualità della conoscenza.[…] Vera o vero professionista è quell'insegnante che, sapendo comunicare conoscenze e abilità (cioè "spiegando bene"), comunica anche se stessa/o, proponendosi come essere umano capace di sentimenti, di confidenza, di sensibilità, insomma di competenza sentimentale, di quella competenza sentimentale che le generazioni giovani hanno il diritto di acquisire unitamente a conoscenze e competenze in ambito cognitivo[27].*"

Non bisogna dimenticare inoltre che bisogna chiedersi continuamente se lo studente possiede le competenze adatte all'apprendimento nella forma nella quale lo si sta presentando. A questo proposito, può essere utile porre dei questionari o delle semplice domande in fase dimostrativa (cfr. Cap. III). Anche Arons[36] sottolinea quanto l'assenza di un'attenzione del genere da parte dell'insegnante impedisca la formazione di pensiero critico nello studente, il quale *per disperazione fa ricorso all'apprendimento mnemonico dei risultati finali e dei procedimenti. Non riuscendo a sviluppare i processi che sono alla base del pensiero critico, non riescono a vivere l'esperienza di una vera comprensione, e giungono a credere che la conoscenza sia inculcata dagli insegnanti e che consista nel riconoscere le giustapposizioni di termini arcani in questionari a scelta multipla.*

È necessario quindi calare lo studente nel contesto di apprendimento giusto (anche storicamente parlando), ricordandogli le ipotesi, il modello e le approssimazioni su cui si basa lo studio che si sta conducendo, affinché egli si renda conto che ciò che gli è stato dimostrato costituisce effettivamente una dimostrazione rispetto a ciò che egli sa già, e rispetto alle ipotesi su cui la dimostrazione stessa si basa.

Seguendo il consiglio di Arons, non bisogna mai smettere di chiedere e di chiedersi: "Come facciamo a sapere che…?"; "Cosa sappiamo…?"; "Quali sono le prove…?"; Insomma, mai dimenticare che la Scienza è capace innanzitutto di risolvere problemi.

SUPPORTI FISICI E SUPPORTI DIGITALI

L'utilizzo di supporti fisici e sistemi meccanici comporta il vantaggio evidente di "materializzare" il fenomeno fisico astratto, facilitando la comprensione, e di coinvolgere emotivamente, consentendo inoltre stimolazioni sensoriali diverse, facilitando dunque l'apprendimento.

L'impiego di supporti digitali, quali video, simulazioni e applet, d'altro canto, consente di superare molti dei limiti dei sistemi materiali: le possibilità di creazione e personalizzazione sono praticamente illimitate.

CAPITOLO II: LE PROPOSTE DIDATTICHE

Le proposte didattiche si possono indirizzare a diversi livelli di insegnamento, di diversa complessità, per formulare un percorso di apprendimento specifico.
Vengono utilizzati due strumenti didattici che si possono facilmente realizzare con materiali comuni e permettono di trattare quasi tutti gli aspetti basilari dell'indeterminismo: una macchina di Galton e un pendolo magnetico.
L'uso della macchina di Galton trova ispirazione da una proposta didattica del PSSC (Physical Science Study Committee[18]), un comitato scientifico istituito presso il Massachusetts Institute of Technology di Boston nel 1956 con lo scopo di revisionare l'istruzione della fisica nella scuola superiore.
La proposta del pendolo caotico deriva da un interessante lavoro di tesi di dottorato che riguarda l'insegnamento del caos deterministico (La fata [17]).

USO DELLA MACCHINA DI GALTON: probabilità, statistica, processi stocastici

La macchina di Galton (detta anche "scatola di Galton", o "quinconce") è un dispositivo inventato da Sir Francis Galton per fornire una dimostrazione pratica del teorema del limite centrale e della distribuzione normale (o gaussiana). Consiste in un piano verticale, sul quale sono piantati perpendicolarmente dei chiodi (o pioli) posizionati secondo la configurazione del quinconce (ossia come la rappresentazione del numero 5 sulla faccia di un comune dado da gioco). Da una fessura, posta in cima a tale piano, vengono fatte cadere delle biglie (le quali, urtando i chiodi, si dirigono verso destra o verso sinistra). Sul fondo sono collocati dei contenitori cilindrici, dove le palline si depositano l'una sull'altra, formando delle pile. Al termine dell'esperimento, le altezze di queste pile assumono approssimativamente la forma di una curva a campana, tipica delle variabili casuali normali. Sovrapponendo un triangolo di Tartaglia alle teste dei chiodi, si può intuire la probabilità con cui una pallina può seguire i diversi percorsi per passare attraverso i chiodi.

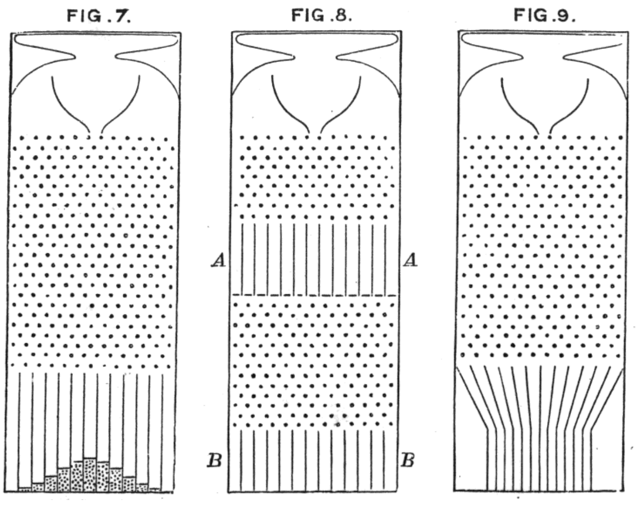


Figura 9. La macchina di Galton in un'illustrazione disegnata proprio da Sir Francis Galton

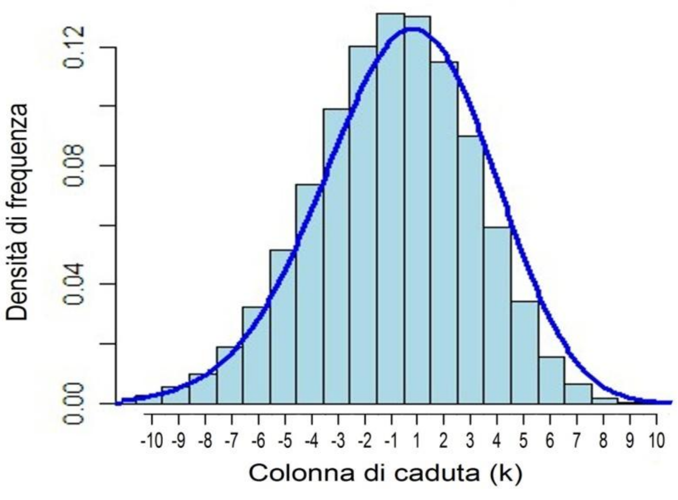


Figura 10. Istrogramma di distribuzione binormale atteso con n=100, p=0.5, e approssimazione con funzione gaussiana (in blu). Il picco corrisponde alle due colonne centrali di caduta, in posizione 1 e -1.

Se una biglia devia a destra per k volte durante la sua caduta (e a sinistra per i restanti chiodi), allora finirà nel k-esimo contenitore a partire da sinistra se il primo contenitore è denotato col numero 0. Denotando con n il numero di righe di chiodi in una macchina di Galton, il numero di percorsi diversi verso il k-esimo contenitore sul fondo è dato dal coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad (5)$$

Se la probabilità delle deviazioni verso destra su un chiodo è p (che vale 0,5 in caso di equiprobabilità, come si può supporre ragionevolmente), la probabilità che la pallina finisca nel k-esimo contenitore è pari a $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, che è la funzione di probabilità della distribuzione binomiale. Per il teorema del limite centrale la distribuzione binomiale approssima quella normale nell'ipotesi che n sia grande a piacere. Un disegno della macchina di Galton è riportato in figura 9. Per le dimostrazioni e l'osservazione dei casi del presente lavoro, è stata costruita una macchina di Galton (Fig. 11) con materiali semplici: una cornice di plexiglass, sul cui supporto di legno sono fissati i chiodi ad una distanza laterale di circa 1 cm. Il pannello di plexiglass viene fissato alla base tramite una cornice di legno, la cui parte inferiore può essere rimossa per raccogliere le biglie cadute. I canali di raccolta sono realizzati con semplici elastici di gomma. Le sferette utilizzate sono piombini di plastica per pistole giocattolo. C'è da notare che la macchina di Galton realizzata fa riferimento alle posizioni di colonna escludendo lo 0, per poter sfruttare la simmetria della distribuzione come verrà chiarito in seguito (Fig. 10).

Figura 11. Macchina di Galton costruita per il presente lavoro.

La macchina di Galton verrà anche usata come un "generatore di casualità". Diviendo le regioni di caduta in regioni di probabilità, si può simulare un qualunque fenomeno stocastico. E' come tirare una moneta per verificare il risultato testa-croce, con il vantaggio di presentare più della una sola alternativa caso favorevole-sfavorevole del 50-50%. Si può utilizzare per ragionare non solo sul concetto di probabilità, statistica e distribuzione statistica, ma anche sul decadimento radioattivo, sull'indeterminismo quantistico, e così via. In seguito verranno esposte le proposte didattiche in dettaglio. Bisogna in questo caso sottolineare che servirsi della macchina di Galton è soltanto un modo per simulare l'evento casuale. In questo modo, la capacità di astrazione e modellizzazione dello studente viene stimolata a collegare i fenomeni osservati con fenomeni ideali o non direttamente osservabili.

INTRODUZIONE: IL MAGO GALTON

Qualunque sia il livello scolastico dello studente, c'è un aspetto nell'utilizzo della macchina di Galton che desta stupore: la proprietà statistica quasi "magica" per cui, se non si può prevedere la posizione di caduta di una singola biglia, si può prevedere senza dubbio la forma della distribuzione di un gran numero di biglie stesse. Questo fatto può essere inaspettato perfino a

molti studenti universitari di facoltà scientifiche che non abbiano sufficientemente riflettuto sulla natura statistica del determinismo che emerge dall'indeterminismo stocastico.
La dimostrazione che propongo partirebbe quindi da una semplice domanda, posta mostrando e descrivendo la struttura della macchina di Galton: "Se lascio cadere una biglia, dove cadrà?".
Basta qualche dimostrazione per mostrare l'imprevedibilità della posizione di caduta. Già a questo punto, si può introdurre il concetto (ed il termine) di indeterminismo. Qualche studente può mostrare un'intuizione (forse imputabile alla simmetria del sistema) secondo cui è più probabile che cada al centro. Ma il comportamento imprevedibile della biglia può mettere in dubbio da subito questa intuizione, la quale può tuttavia aprire la strada al concetto di "probabilità" di accadimento di un evento.

Nei bambini, la presentazione della probabilità può essere effettuata tramite il gancio emozionale della scommessa. Dopo aver presentato la macchina di Galton, o addirittura averne costruita una insieme agli studenti per renderli ancora più consapevoli del meccanismo di caduta delle sfere (un modo molto veloce e semplice impiega i mattoncini LEGO, Fig. 12), si può dividere la regione di caduta in due sezioni simmetriche, chiedendo a due bambini di sceglierne una: chi ottiene più biglie cadute nella sua regione, vince. Si può chiedere alla classe cosa si aspetta: è probabile che molti intuiranno un risultato pari.
La dimostrazione farà capire che è in qualche modo *equiprobabile* che una biglia cada nelle due regioni, provocando il passaggio continuo dello status di "vincitore" da un bambino all'altro. Ritengo che l'equiprobabilità sia molto utile per introdurre la probabilità stessa.
Il passaggio successivo, può essere quello di introdurre una suddivisione delle colonne diversa: una centrale, dalla colonna -3 alla +3, e due laterali, da -4 a -10 a da +4 a +10. A questo punto, cominciata la scommessa tra tre bambini, può cominciare a risultare evidente che il bambino che sceglie la colonna centrale vince più spesso.
In seguito interviene l'insegnante, mostrando il gioco di prestigio: ammette di non poter prevedere dove cadrà la singola biglia. Però, può stupire tutti mostrando la forma della distribuzione finale.
Adesso, si richiede un ulteriore passaggio mentale al bambino: comprendere che alla *probabilità* (evento indeterministico-stocastico) di evento della singola biglia corrisponde un'analoga *percentuale* di biglie cadute, prevedibile se il numero di biglie è grande. Dall'indeterminismo può emergere il determinismo.
Per esempio, se una moneta presenta equiprobabilità di risultato testa e croce, non posso conoscere in precedenza il risultato del prossimo lanci, ma posso prevedere che dopo 1000 lanci otterrò *più o meno* 500 teste e 500 croci. La fluttuazione del "più o meno 500 teste e croci" dipende dalla dimensione finita del campione: se avessi un numero grandissimo di biglie, sarei sempre più certo (con fluttuazione cioè via via minore) del risultato del 50%-50%.

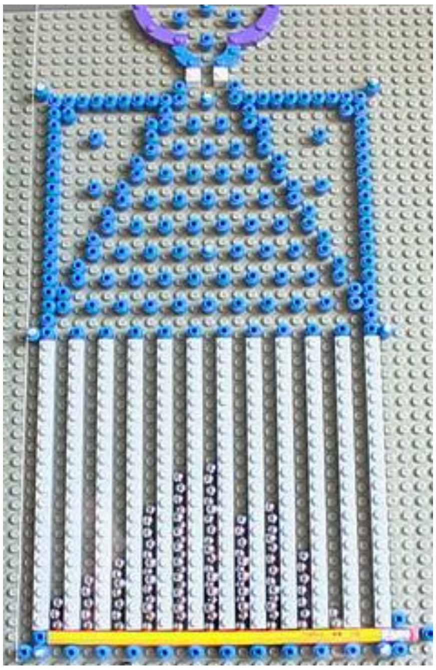


Figura 12. Macchina di Galton realizzata con mattoncini LEGO[25].

Ai bambini può essere perciò spiegato che la previsione diventa più precisa via via che il numero di biglie cresce: la forma della distribuzione ottenuta è cioè approssimativa. Si potrebbe usare l'analogia fotografica per cui, se una fotografia ha bassa risoluzione, i contorni delle figure hanno intervalli di incertezza maggiori. Le fotografie migliori richiedono un grandissimo numero di pixel.

Ad un livello superiore di insegnamento (per esempio, nelle scuole superiori), si può cominciare da una trattazione ludica simile, per poi introdurre formalmente il concetto di distribuzione, seguendo la metodologia del videocorso PSSC[18] sugli eventi casuali, e cioè partendo dalla definizione di distribuzione di frequenza e dal confronto di distribuzioni di frequenza (normalizzate e dunque confrontabili) ottenute con un numero sempre maggiore di biglie.

Le distribuzioni di frequenza sono in questo caso istogrammi: alle ascisse troviamo il numero della colonna di caduta, alle ordinate la frequenza (*assoluta* se si riporta il numero di biglie cadute in ciascuno, *relativa* se si normalizza la distribuzione dividendo questo numero per il numero totale n delle biglie per poter confrontare istogrammi per n diversi). La macchina di Galton consente di visualizzare immediatamente gli istogrammi di frequenza (assoluta, ma la forma non varia se si rappresenta un diagramma di frequenza relativa).

La differenza tra le distribuzioni di frequenza e le distribuzioni di probabilità risiede nel fatto che le prime sono empiriche, cioè costruite utilizzando l'esperienza, e si riferiscono alla <u>frequenza di ciò che è accaduto</u> mentre le seconde, alle quali le prime tendono per n crescente, sono funzioni che sintetizzano la relazione tra i valori di una variabile casuale e <u>la probabilità che questi si presentino</u>: una distribuzione di probabilità applica perciò la teoria della probabilità per descrivere matematicamente il comportamento di una variabile. Nella fattispecie, la distribuzione di frequenza ottenuta nella macchina di Galton *riproduce* la forma "a campana" della distribuzione statistica binomiale e, per n molto grande, della distribuzione normale (o gaussiana), di cui la binomiale può considerarsi un'approssimazione (Fig. 13).

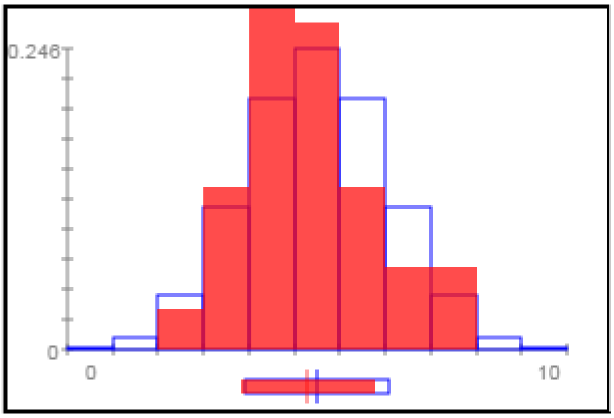


Figura 13. Differenza tra distribuzione di frequenza ottenuta con *pochi* lanci alla macchina di Galton (in rosso) e distribuzione di probabilità gaussiana limite.

Anche a livello universitario, dove la trattazione della statistica è essenzialmente formale (introduzione delle variabili casuali, studio delle diverse distribuzioni con dimostrazioni per trovare i parametri delle distribuzioni stesse, e il legame tra le varie distribuzioni, per esempio del limite normale della binomiale), la macchina di Galton può offrire un utilissimo supporto per materializzare situazioni astratte (spesso, il rischio dei corsi universitari è che si esalti l'eleganza della trattazione formale a discapito della comprensione profonda del fenomeno fisico).

SUPPORTI FISICI E SUPPORTI DIGITALI

I supporti digitali, quali video e simulazioni, sia per pc che in formato app per tablet e smartphone, possono essere di grande utilità per le esperienze proposte. Da un lato, permettono di assicurare una grande velocità e un ottimo controllo dell'esecuzione dimostrativa. Dall'altro, consentono di modificare i parametri del sistema con grande facilità (per esempio il numero totale di biglie, il valore della probabilità p, o il numero di colonne di caduta).
È possibile per esempio mostrare quanto la previsione sulla distribuzione finale delle biglie sia eccezionalmente efficace quando il numero di biglie è grandissimo[26].
In rete sono disponibili molti simulatori della macchina di Galton. Il primo qui considerato[28], permette di selezionare il numero di colonne di caduta, la probabilità "sinistra" o "destra" p, e il numero di prove (lanci), visualizzando la distribuzione di frequenza normalizzata sovrapposta alla distribuzione statistica normale. Alcuni esempi sono riportati in figura 14 e 15.
Il secondo simulatore offre le stesse possibilità del primo, ma permette una visualizzazione più realistica della caduta delle sfere, ed in più conteggia le sfere cadute in ogni colonna. Queste cifre possono essere utilizzate per costruire ed elaborare gli istogrammi di frequenza, per esempio con excel.

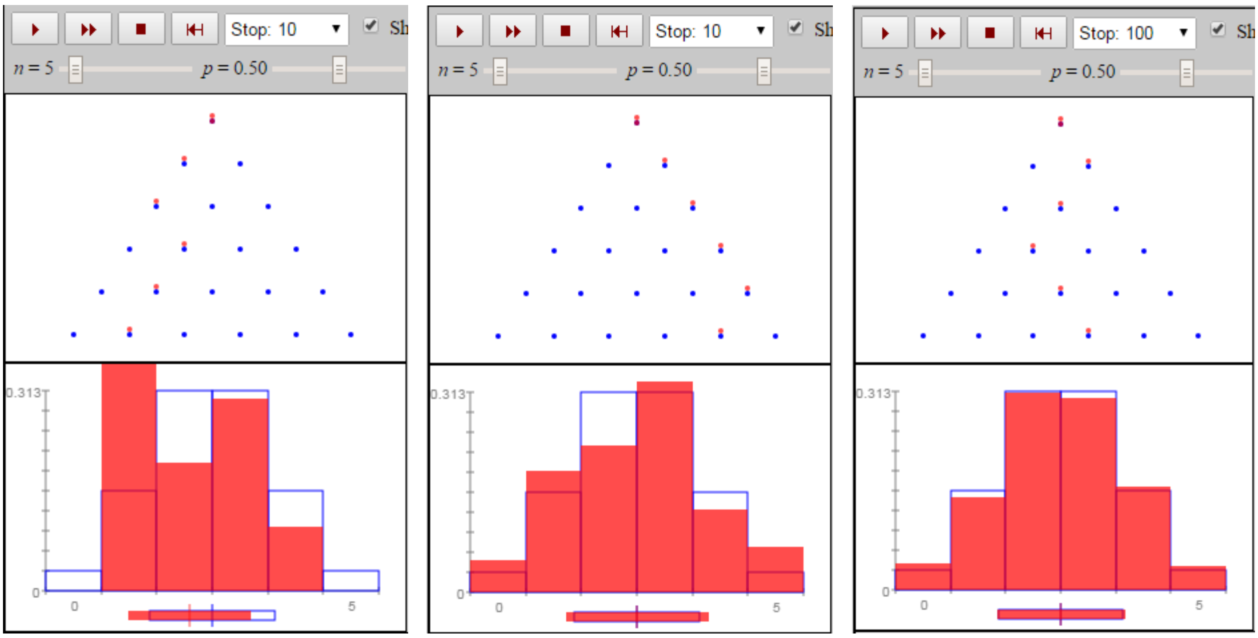


Figura 14. Simulatore di Galton con 5 colonne e 10, 100 e 400 biglie: è evidente che al crescere delle prove la distribuzione in frequenza tende alla distribuzione di probabilità, che può essere quindi utilizzata per compiere previsioni via via più precise al crescere di n.

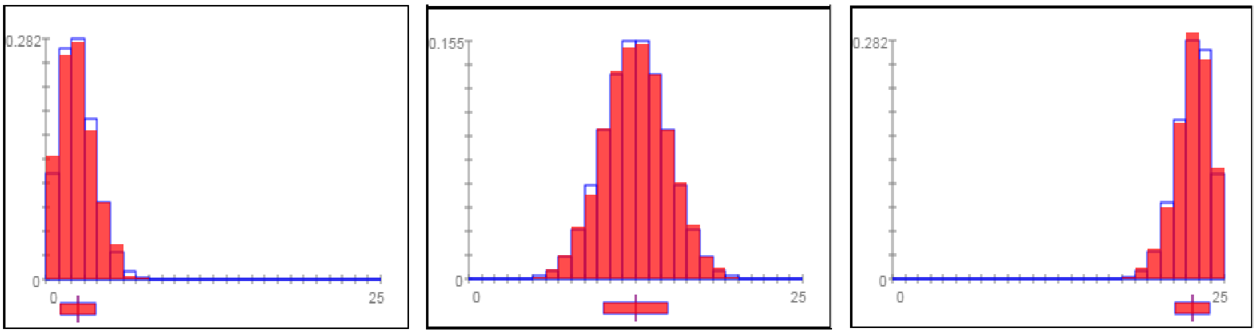
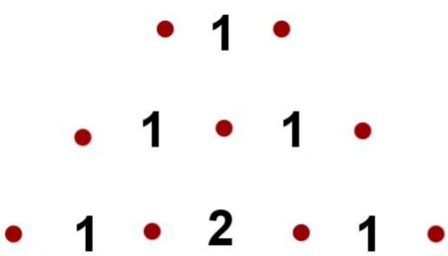
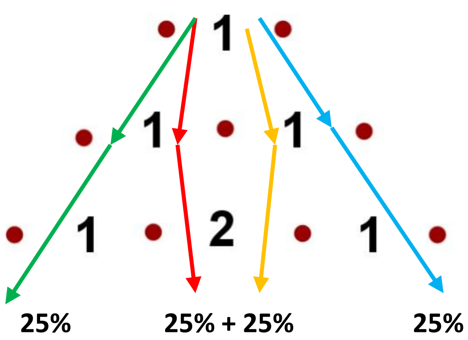


Figura 15. Simulatore di Galton con 25 colonne e 2000 biglie: si può apprezzare benissimo la forma a campana della distribuzione gaussiana. Da sinistra a destra, sono illustrate tre diverse situazioni in cui la probabilità sinistra di caduta varia da p=0.08, p=0.50 (simmetria) a p=0.92. Un sistema asimmetrico può essere creato inclinando la macchina di Galton: in questo caso la forza peso avrà anche una componente trasversale rispetto alla direzione di caduta, rendendo diversa la probabilità, per ogni piolo, che la sferetta cada a sinistra piuttosto che a destra.

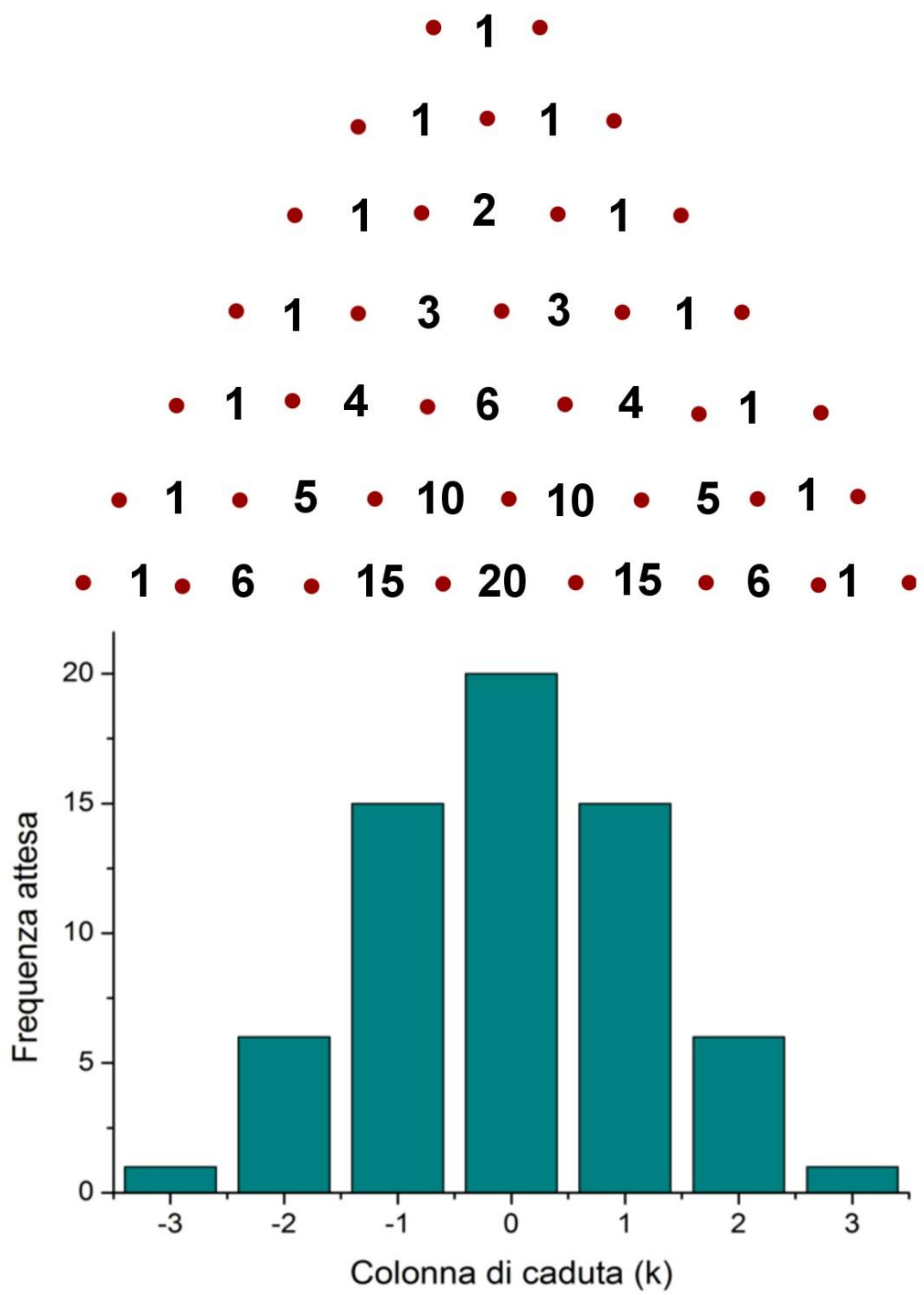
LA FATIDICA DOMANDA

Perché è più probabile che una biglia cada nelle colonne centrali nella macchina di Galton? È molto semplice dimostrarlo matematicamente, utilizzando la distribuzione binomiale e osservando che la media della distribuzione è lo 0. Questo può essere fatto, posso immaginare, con studenti a partire dalle scuole secondarie superiori (ultimo anno). Ma, anche per gli studenti universitari stessi, credo che la dimostrazione, nonostante la sua eleganza ed efficacia, non permetta di sottolineare un fatto molto semplice, che spesso viene completamente trascurato, e che permette di comprendere profondamente la caratteristica dell' "essere più probabile".
La caduta in una colonna centrale è più probabile non per qualche intrinseco motivo misterioso: semplicemente, essa è il risultato di un numero maggiore di processi equiprobabili. Per poter illustrare ciò, basta considerare un semplice triangolo di Tartaglia, le cui cifre sono poste in corrispondenza delle posizioni di caduta nel quinconce di chiodi. Una sferetta cade dalla prima riga (1 processo): supponiamo che sia equiprobabile che vada a destra o sinistra: ciascuna di queste cadute nella seconda riga rappresenta un nuovo processo singolo (1 processo a destra, 1 a sinistra). A questo punto, ogni biglia può di nuovo cadere equiprobabilmente a destra a sinistra: si ottengono 1 processo ai lati, e 2 processi al centro. In tutti, abbiamo 4 eventi equiprobabili (25% di probabilità ciascuno), ma alla colonna centrale ne corrispondono 2 diversi (50% di probabilità totale).





E dunque, se ripetiamo il discorso per un sistema più vasto, otteniamo la distribuzione di probabilità attesa, ottenuta semplicemente rappresentando i numeri alla base del triangolo di Tartaglia (i cui termini sono i coefficienti binomiali) in un istogramma. L'unico assunto alla base di questo discorso induttivo è quello dell'equiprobabilità, qui considerato come un concetto primitivo (non è interessante, ai fini di questo lavoro, l'aspetto tautologico dello studio della probabilità assumendo l'equiprobabilità).

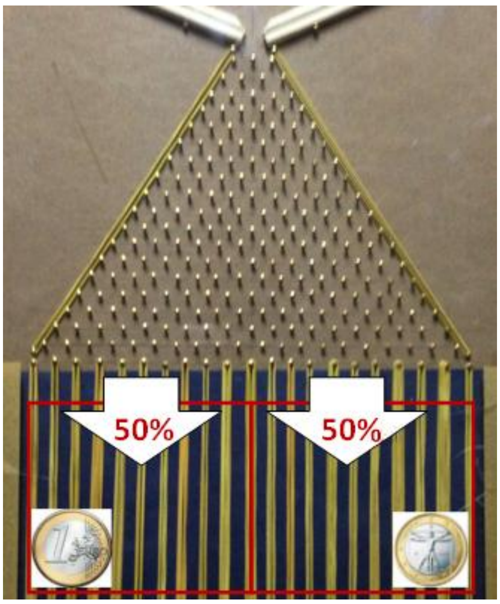


Allo stesso modo, se considero 3 lanci consecutivi di una moneta, con equiprobabilità degli eventi testa (T) o croce (C), ottenere 3 volte testa è improbabile, perché la configurazione di questo risultato è molto "speciale" (fig. 16): esso è infatti ottenibile soltanto attraverso un'unica specifica sequenza di (T,T,T). Invece, ottenere in 3 lanci 2 teste e 1 croce, è per esempio più probabile (tre volte più probabile): le configurazioni possibili sono infatti: (T, C, T), (C, T, T), (T, T, C).

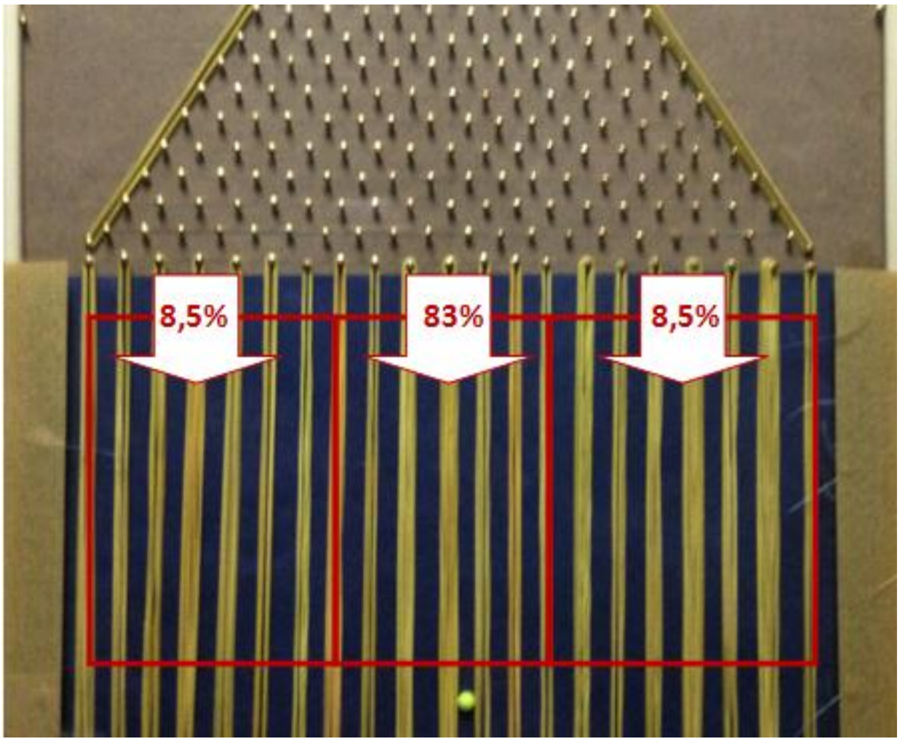
Figura 16. Il numero di configurazioni (equiprobabili) possibili per ottenere 3 teste (1 sola,in alto) è inferiore a quello per ottenerne 2 (3, a destra): ottenere 2 teste in 3 lanci è perciò più probabile che ottenerne 3.

IL "GENERATORE DI CASO"

Dopo aver illustrato l'indeterminismo stocastico insito nel comportamento della singola biglia nella macchina di Galton, si può utilizzare quest'ultima, dividendo le colonne in opportune regioni di probabilità, per simulare diversi eventi probabilistici.
In questo modo, si può comprendere per analogia l'aspetto stocastico intrinseco che accomuna tutti questi fenomeni.
Banalmente, dividendo il quadrante in due regioni simmetriche (per esempio utilizzando dei fogli trasparenti, da applicare sul quadrante, che evidenzino queste regioni), si può simulare il lancio di una moneta non truccata, verificando per esempio quanto sia poco probabile che lanciando 3 monete (3 biglie) si ottengano 3 teste (3 biglie nella regione sinistra, per esempio).



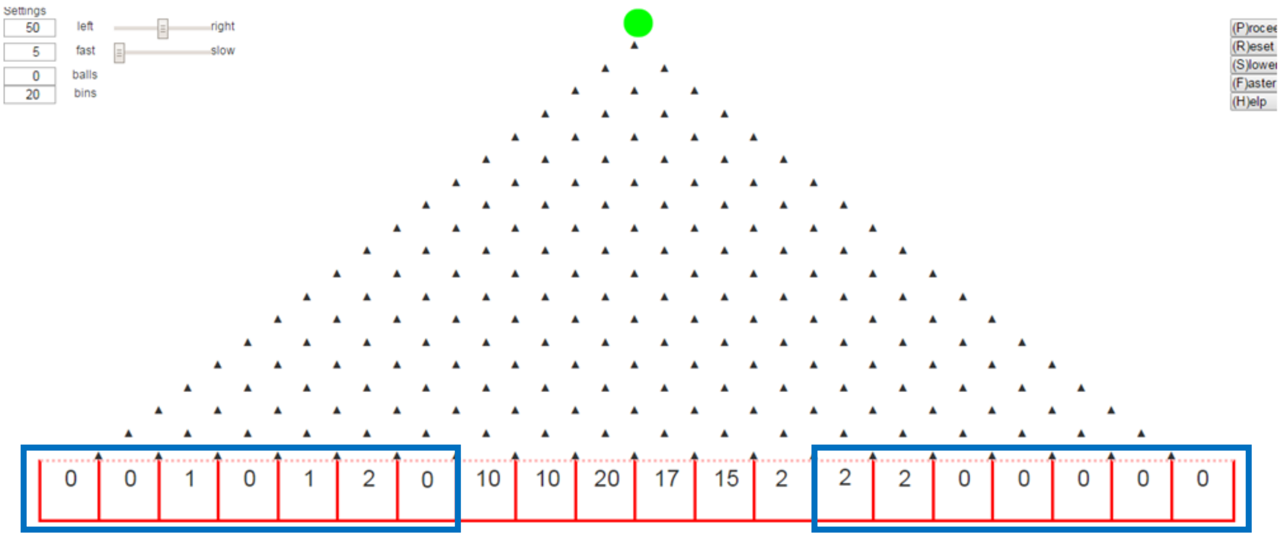
Se, d'altro canto, si studia l'espansione binomiale attraverso un triangolo di tartaglia con 20 colonne finali, si ottiene la sequenza: 1 19 171 969 3876 11628 27132 50388 75582 92378 92378 75582 50388 27132 11628 3876 969 171 19 1, per le successive colonne. Allora, per esempio, il rapporto tra la somma del valore delle 6 colonne centrali (436696) rispetto al totale (524288), darà la probabilità di caduta in questa regione centrale (circa 83%).



In questo modo, si può per esempio rendere direttamente osservabile la natura dell'indeterminismo di tipo quantistico. Secondo il postulato della proiezione, l'atto della misura di una grandezza osservabile di un sistema lo fa collassare su uno dei suoi autostati. Questo postulato non ammette una interpretazione immediata: in generale un sistema fisico è una sovrapposizione di autostati di una certa variabile dinamica del sistema. Il processo di misura di questa grandezza fa collassare la funzione d'onda in uno dei suoi autostati. A priori non si sa in quale autostato collasserà la funzione d'onda: ogni autostato quindi ha una certa probabilità di essere "scelto" dalla funzione d'onda successivamente alla misura effettuata. Sono particolarmente importanti gli autostati dell'energia (ovvero gli autovettori dell'operatore hamiltoniano che descrive il sistema) di un sistema conservativo. Questi vettori rappresentano gli stati fisici ad energia definita nei quali il sistema può rimanere invariato nel tempo; questi stati sono quelli che descrivono i sistemi atomici e molecolari in condizioni di stabilità.
Si supponga per esempio, che esista una probabilità dell'83% che, dopo una misura, il sistema risulti avere una certa energia E: in questo caso, usando la macchina di Galton, si può simulare una misura di questa osservabile lanciando una biglia. Se essa cade nella regione centrale, vuol dire che la funzione d'onda è collassata in un autostato dell'energia che corrisponde al valore E considerato.

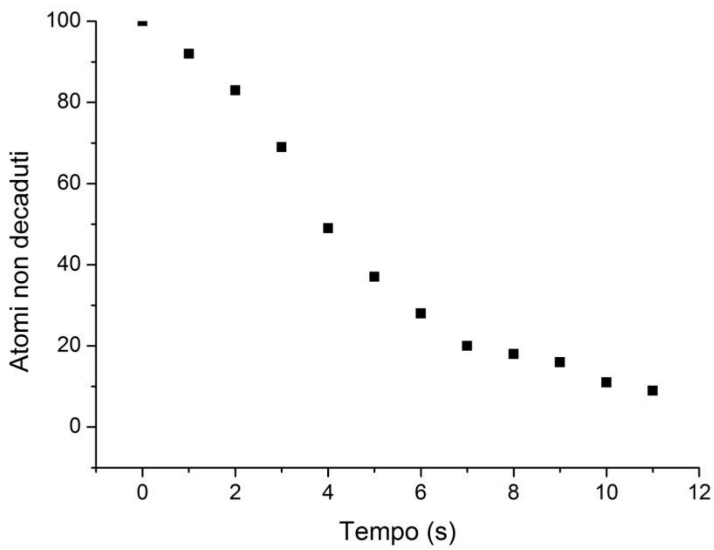
Un altro esempio è la simulazione del decadimento radioattivo. Si consideri un campione composto da atomi che hanno il 17% di probabilità di decadere: $\lambda = 0.17$. Allora, posso immaginare di osservare 100 atomi (100 biglie). Al primo lancio corrisponde il primo intervallo di tempo di osservazione del decadimento. Circa 17 biglie cadranno nelle due regioni esterne. Queste rappresenteranno gli atomi decaduti. Al passo successivo, considero le biglie cadute nella regione centrale, cioè gli atomi non decaduti, e itero il processo. Posso così ricostruire la curva di decadimento. Un esempio dettagliato, ottenuto sfruttando un altro simulatore di macchina di Galton[30], viene dato di seguito.

Lancio 100 sfere nel primo lasso di tempo (per esempio 0 secondi), ottengo 8 biglie nelle prime 7 colonne e nelle ultime 7 (le due regioni esterne). 8 dei 100 atomi sono decaduti.



Lancio le restanti 92 (tempo = 1 s), e osservo gli ulteriori decadimenti in modo ricorsivo. Ottengo i dati sintetizzati in tabella, e rappresentati in figura. Si è ottenuta la legge del decadimento radioattivo.

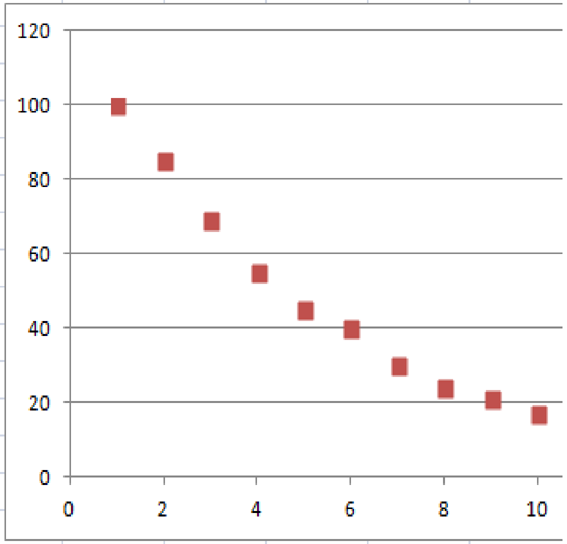
TEMPO (s)	Atomi non decaduti
0	100
1	92
2	83
3	69
4	49
5	37
6	28
7	20
8	18
9	16
10	11
11	9
12	7



Questa stessa simulazione può essere eseguita con foglio elettronico, per esempio Excel, utilizzando la funzione CASUALE(). In questo caso, le colonne rappresentano i secondi. Al tempo 0 s, si scrive una colonna di valori 1 (100 righe), valore che corrisponde agli atomi non decaduti. Se il numero generato è compreso per esempio tra 0 e 0,17 l'atomo si considera decaduto (si può utilizzare alla colonna successiva la funzione SE(1*CASUALE()<0.17;1;0), che restituisce il valore 1 se l'atomo è non decaduto). In questo modo, alla colonna successiva, cioè al tempo 1s, troveremo soltanto i valori 1 sopravvissuti al decadimento, cioè gli atomi non decaduti.
Questa procedura è un esempio di Metodo Montecarlo, cioè un metodo computazionale basato sul campionamento casuale per simulare fenomeni e ottenere risultati numerici. Usato in questo modo, permette anche di riflettere sul concetto di funzione (nella fattispecie esponenziale), servendosi di un'utile discretizzazione.
L'uso del foglio elettronico è anch'esso molto formativo, perché consente di avvicinarsi ai metodi di calcolo numerico per comprendere la matematica nei suoi algoritmi, organizzare dati e risolvere problemi.
Di seguito è riportata l'immagine acquisita di un foglio di lavoro strutturato come appena descritto. Un consiglio potrebbe essere quello di dedicare ad una casella a parte il valore di λ, così da poterlo modificare e far osservare cosa accade alla curva: quando è maggiore, e quindi ogni atomo ha maggiore probabilità di decadere, la curva si "restringe" temporalmente. In questo modo, un aspetto puramente probabilistico ha ripercussioni evidenti (e deterministiche) sull'intero campione: il tempo di dimezzamento (costante e determinabile, ovvero misurabile), che ricordiamo essere calcolabile come $\mathrm{t}_{1/2} = \ln 2/\lambda$ sarà ridotto in modo assolutamente prevedibile!

D8 =SE(C8*CASUALE()<0,17;0;1)

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
TEMPO S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
NON DEC	100	85	69	55	45	40	30	24	21	17
	somma ↑	somma ↑	somma ↑	somma ↑	somma ↑	somma ↑	somma ↑	somma ↑	somma ↑	somma ↑
	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0



USO DEL PENDOLO MAGNETICO O CAOTICO: il caos deterministico

La descrizione seguente del pendolo magnetico è interamente tratta da un recente lavoro di ricerca [17] in cui è efficientemente descritto il suo funzionamento e le sue potenzialità nel descrivere il caos deterministico.

Il pendolo magnetico evidenzia in un moto semplice il fenomeno della "dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali" e la presenza, nei moti caotici dissipativi, degli attrattori strani. Esso (Fig. 17) è costituito da un pendolo alla cui estremità è collegato un magnete e una base su cui sono adagiati tre magneti, posti ai vertici di un triangolo equilatero. Nella posizione di equilibrio stabile il pendolo giace al di sopra dell'incentro del triangolo ai vertici del quale sono posti i magneti. I tre magneti fissi ed il magnete mobile possono attrarsi o respingersi a seconda delle polarità.

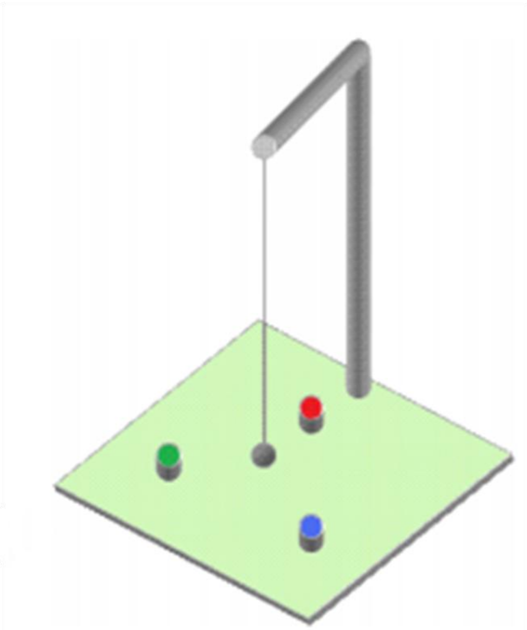


Figura 17. Esempio di pendolo caotico.

Quando il pendolo viene rilasciato da una posizione qualsiasi inizia ad oscillare in maniera irregolare per fermarsi alla fine attratto da uno dei magneti posti alla base del pendolo. Il suo moto risulta molto sensibile alle condizioni iniziali: una piccola variazione nel punto di avvio causa grandi cambiamenti di traiettoria, tanto che diventa impossibile prevedere dove il pendolo si dirigerà. Il moto che ne risulta è un esempio di "caos deterministico". Analizziamo la proiezione del moto su un piano parallelo a quello dove giacciono i magneti fissi. Dopo che il pendolo viene rilasciato da una posizione iniziale, esso sarà soggetto alla forza di gravità, allo smorzamento dovuto all'aria e alle forze magnetiche dovute ai magneti che si trovano sul piano. Note queste forze, si possono scrivere, le equazioni differenziali che descrivono il moto del pendolo. Integrando numericamente queste equazioni si possono ricavare la traiettoria del pendolo istante per istante.

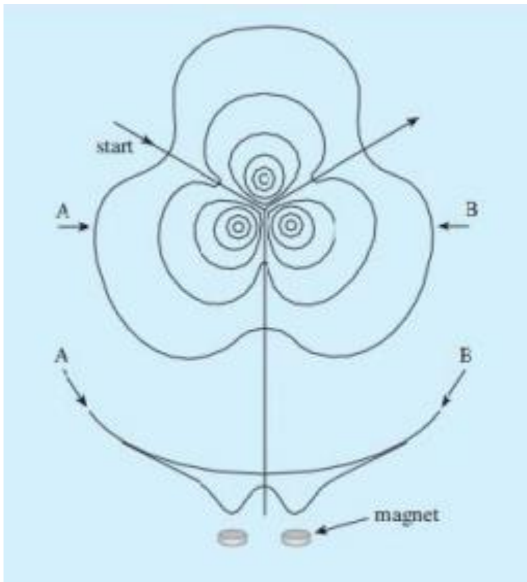


Figura 18. Rappresentazione del potenziale a cui è sottoposto il pendolo caotico con tre magneti alla base, ai quali corrispondono tre buche di potenziale.

Tale sistema, pertanto, se da un lato è un sistema deterministico, ossia è nota una legge che ci permette di ricavare la posizione del pendolo ad un certo tempo t, dall'altro presenta una ben evidente aleatorietà nel suo comportamento. Infatti, sono individuabili tanti attrattori strani quanti sono i magneti posti alla base del pendolo (Fig. 19). Il sistema rimane confinato da un certo momento in poi in una di queste regioni dello spazio dette attrattori starni eseguendo un moto caotico ed imprevedibile. Se il pendolo parte da un punto all'interno di un bacino di attrazione abbiamo la certezza che si fermerà nell'attrattore all'interno di quel bacino di attrazione. L'attrattore rappresenta dunque per il sistema un punto di equilibrio stabile e coincide con una delle

buche di potenziale che si determinano per la presenza dei magneti.
Se esso parte dal bordo di un bacino di attrazione o da un punto qualsiasi del piano allora non possiamo più prevedere dove andrà a fermarsi, si tratta infatti di punti di instabilità del sistema. Tali punti sono rappresentati nello spazio delle fasi da dei punti sella. Quando il pendolo durante il suo moto si trova in prossimità di una multipla buca di potenziale (un punto di biforcazione) è come se fosse in un punto di equilibrio instabile. Pertanto, sotto l'azione di piccole perturbazioni casuali può seguire una traiettoria o un'altra, è impossibile sapere a priori verso quale ramo della biforcazione il sistema evolverà. Nella figura 18 è rappresentato il potenziale a cui è sottoposto il pendolo caotico con alla base tre magneti. Aumentando il numero di magneti alla base del pendolo, aumenta il numero di buche di potenziale e dunque il numero di punti instabili.

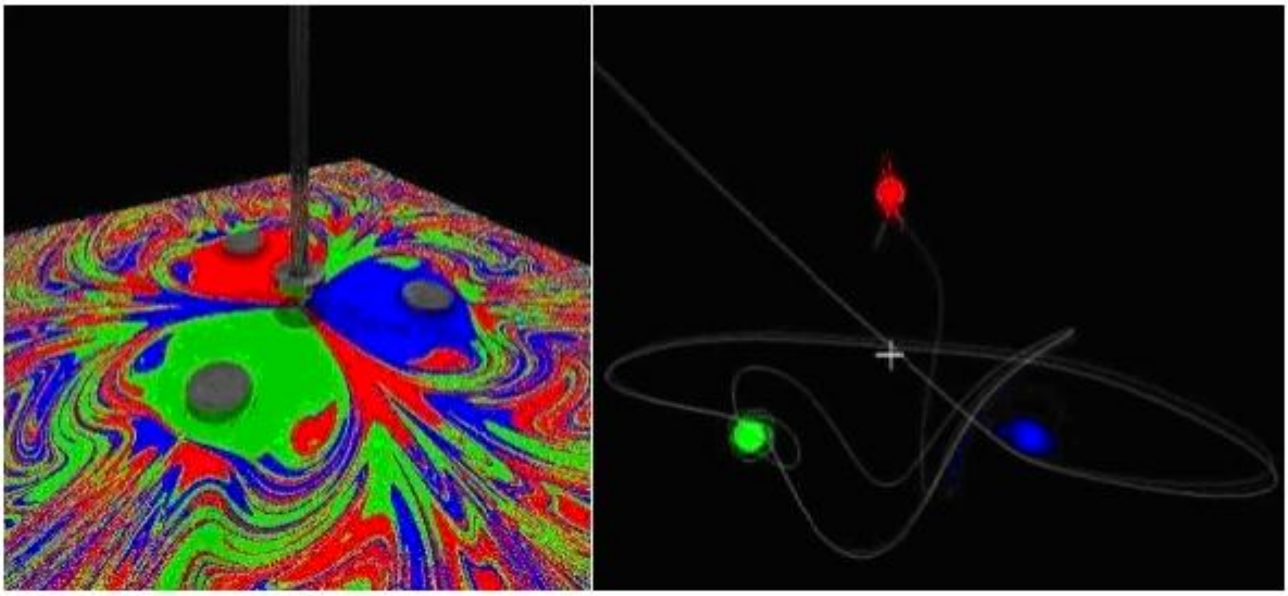


Figura 19. Immagine tratta da un simulatore [19] di pendolo caotico, con buche di potenziale in evidenza.

PREMESSA: DETERMINISMO CLASSICO CON PENDOLO SEMPLICE

Il pendolo magnetico include diverse caratteristiche dei sistemi dinamici non lineari: imprevedibilità del moto a lungo termine, presenza di zone di equilibrio instabile ed attrattori con struttura frattale. Può essere dunque utilizzato per realizzare un esperimento qualitativo che illustra molte caratteristiche del caos deterministico. Realizzare un pendolo magnetico è inoltre estremamente semplice, e il suo uso è molto coinvolgente, soprattutto per gli studenti più giovani. Esso può essere usato, riducendo la lunghezza del pendolo, come pendolo semplice a scopo dimostrativo.
Per comprendere il caos deterministico, è consigliabile infatti individuare le sue caratteristiche a partire dal confronto tra un sistema caotico ed uno non caotico.

Figura 20. Pendolo caotico a tre magneti realizzato per questo lavoro con materiali molto semplici.

Per quanto riguarda allora i fenomeni non caotici, Un aspetto importante nell'osservazione del pendolo semplice riguarda la "prevedibilità": si può mostrare che sintonizzando il pendolo con il ticchettio di un orologio, per un certo tempo (limitato a causa dell'attrito con l'aria) il pendolo si comporterà in modo assolutamente *regolare*.
Si può ricorrere ad un simulatore[31], molto utile per variare le grandezze di interesse ed effettuare misure virtuali. Nota infatti la formula per calcolare il periodo del pendolo semplice:

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{g}}} \qquad (6)$$

si può mostrare che impostando una lunghezza di $\mathrm{l} = 0.995\ \mathrm{m}$ si ottiene un orologio a pendolo che batte il secondo (il periodo è di due secondi, ad ogni semioscillazione corrisponde un secondo), il cui comportamento è esattamente prevedibile (Fig. 21).
E' dunque evidente in questo caso la potenza della previsione meccanicistica dell'indeterminismo: posso risalire alla posizione del pendolo in ogni istante di tempo futuro (e passato).
Questo sistema non ha più segreti per me, non può "tradirmi" in alcun modo.

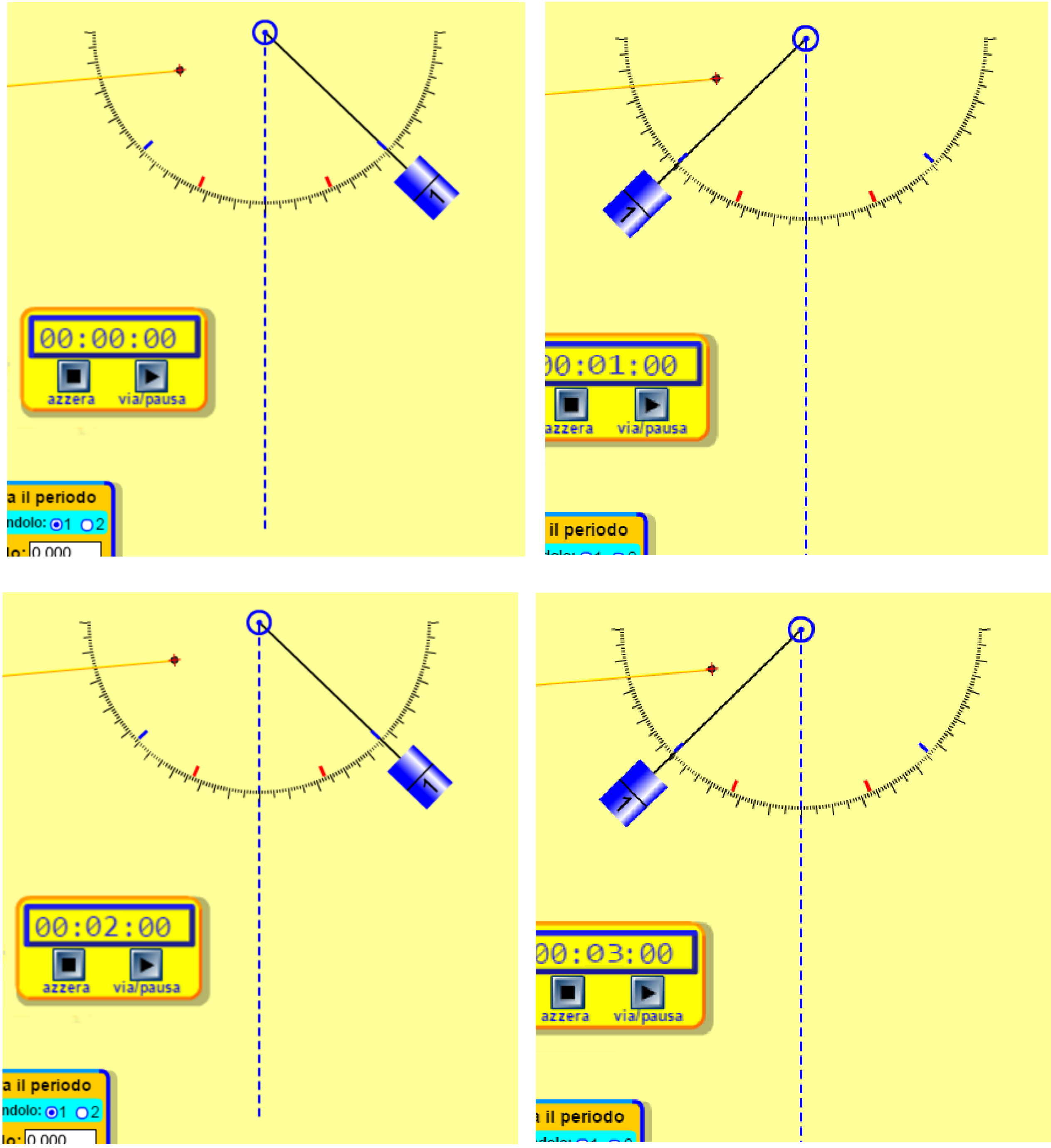
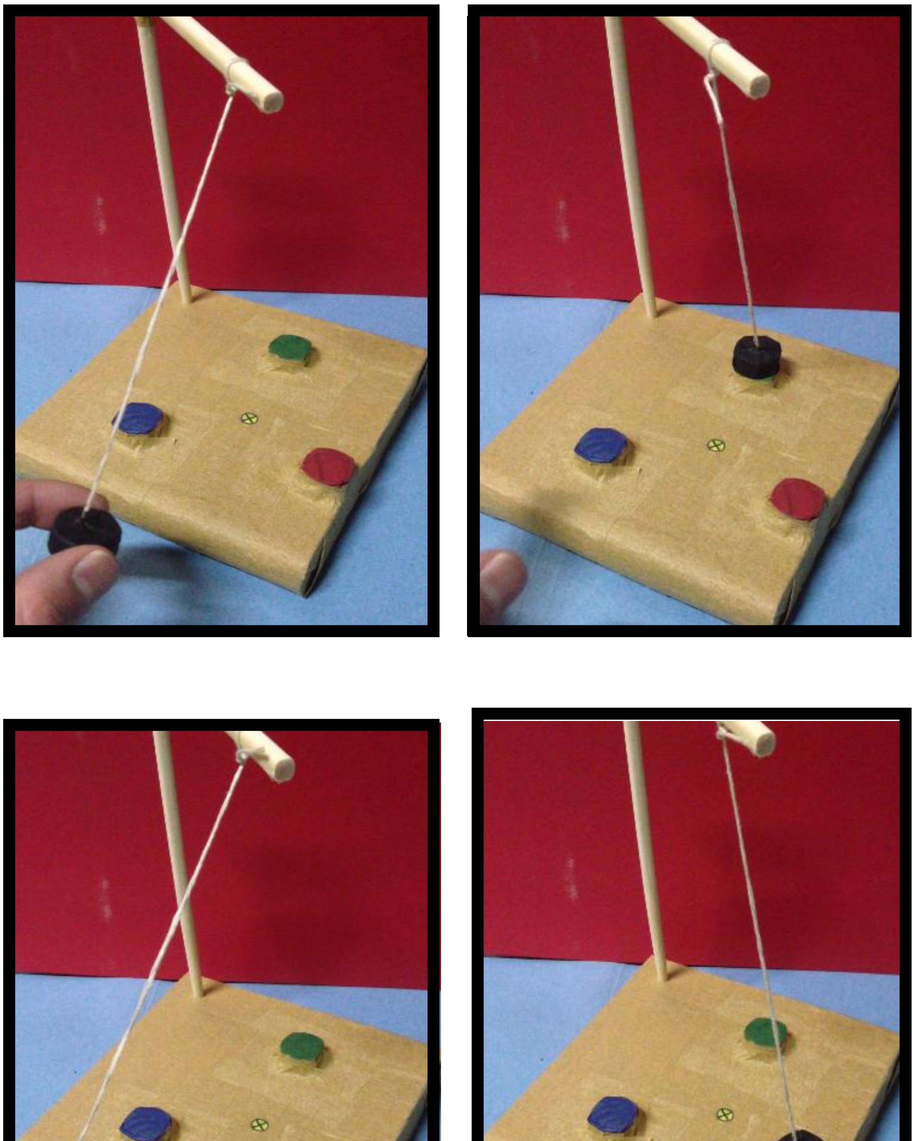
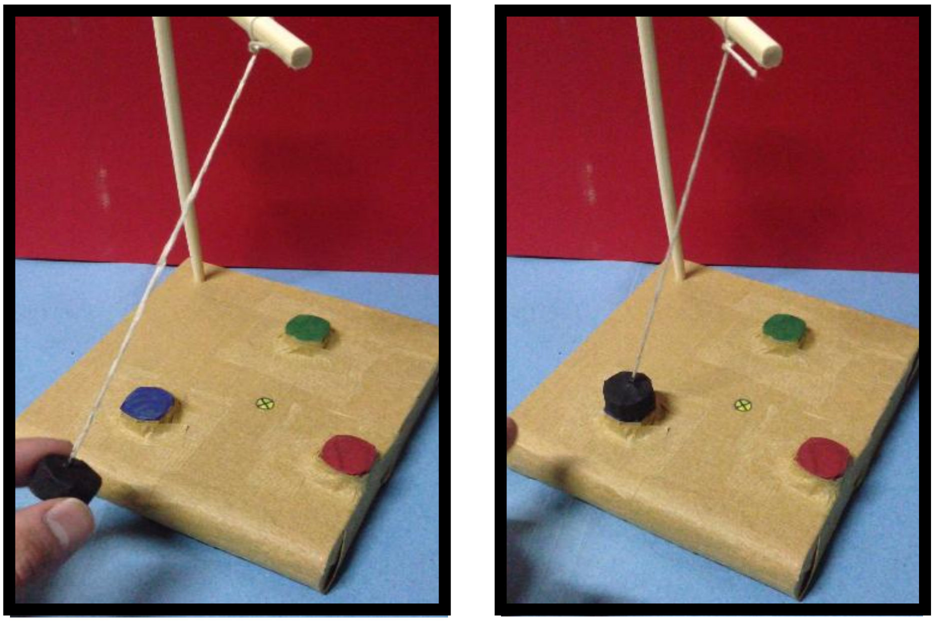


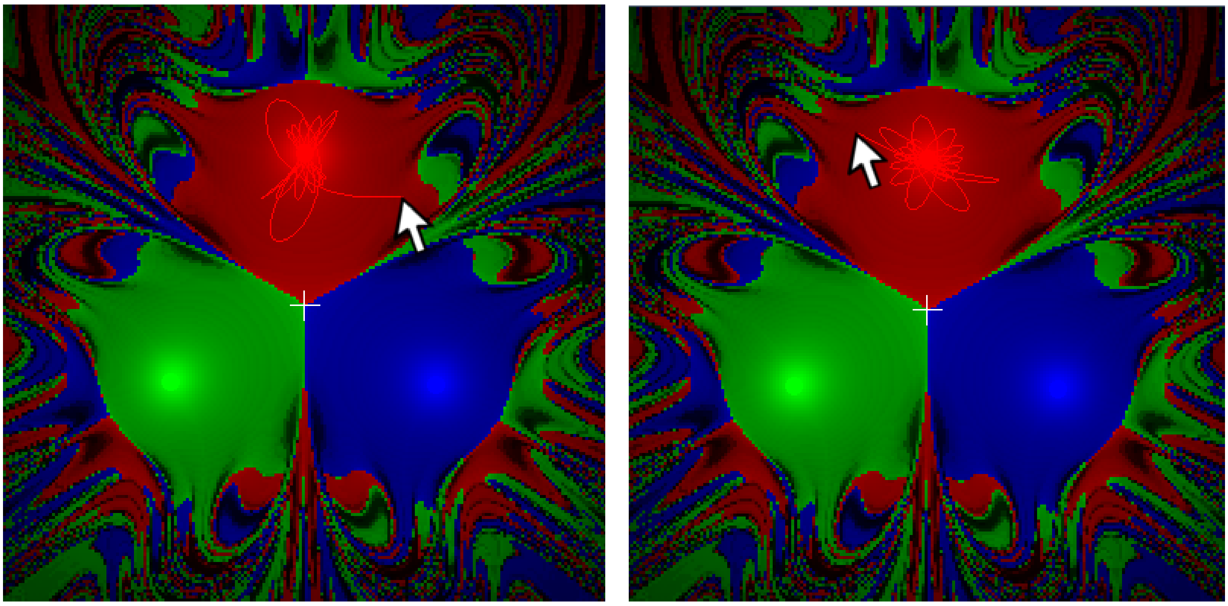
Figura 21. Comportamento deterministico del pendolo semplice.

Qual è invece il comportamento del pendolo caotico? Basta un'osservazione immediata per rendersene conto: cambiamenti improvvisi di traiettoria, scatti repentini, vibrazioni continue.
Cosa si nasconde alla base di tutto ciò?
In particolare, si fa notare qualitativamente che, facendo partire il pendolo caotico da due posizioni iniziali pressoché uguali, si ottengono dopo poco tempo posizioni finali completamente diverse. La piccola differenza tra posizioni iniziali viene cioè fortemente amplificata.
Tutto ciò diventa più evidente con una ripresa video, di cui mostriamo alcuni frame di seguito. Per prima cosa, osserviamo che a posizioni iniziali vicine (a sinistra) corrispondono risultati diversi (a destra).

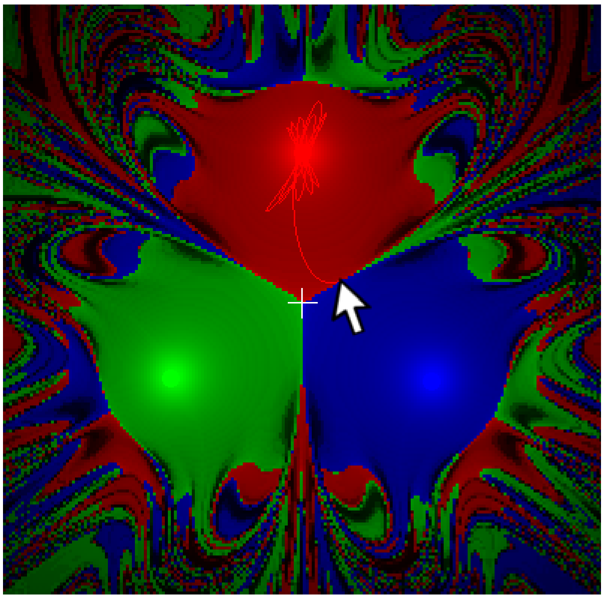


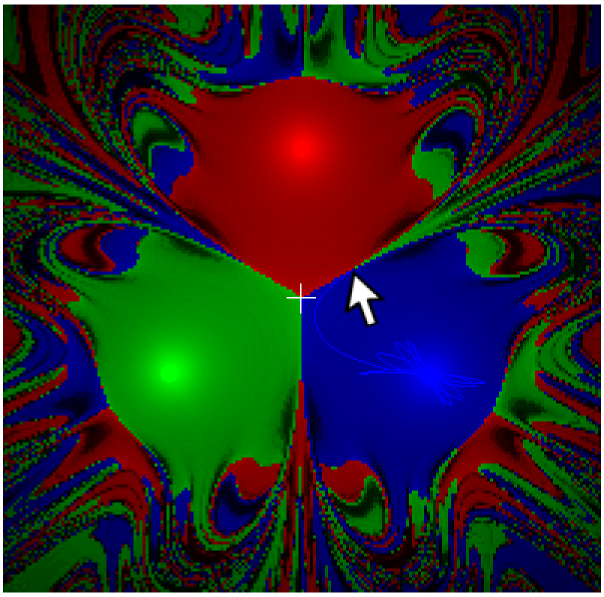


Gli studenti si rendono presto conto che non possono prevedere su quale delle tre calamite il pendolo si fermerà. Ma c'è un'eccezione: se il punto iniziale si trova nei pressi della calamita, cioè in un bacino di attrazione, possiamo determinare con certezza la posizione finale.

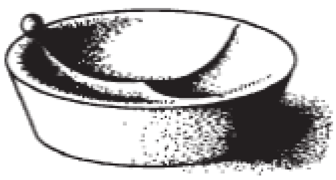


Cosa succede invece al confine tra bacini di attrazione diversi? Lungo il confine, il comportamento risulta instabile.





La risposta risiede nella forma del potenziale del pendolo caotico, caratterizzato da punti di instabilità del sistema. Per comprendere ciò, dopo aver raccolto le osservazioni degli studenti, La Fata[17] consiglia di mostrare l'immagine di una ciotola caotica (chaosbowl), cioè una scodella divisa in tre parti con dei rialzamenti: t*ramite ragionamento analogico, essi potranno così collegare il comportamento imprevedibile del pendolo magnetico con l'esistenza di punti di instabilità nella regione circostante il pendolo dovuti alla presenza delle calamite.*



chaosbowl

All'esterno della zona centrale, la regione è fortemente irregolare, e i bacini di attrazione non si osservano. Diventa perciò impossibile prevedere le sorti finali del pendolo.

Ultime osservazioni: il pendolo caotico e la chaosbowl permettono di ragionare molto agevolmente sui concetti di equilibrio stabile e instabile: per il pendolo semplice, o per quello caotico che si trovi in un bacino di attrazione, accade che spostandolo di poco dalla posizione di equilibrio, esso torna in quest'ultima. Non si può dire lo stesso dei punti di instabilità del pendolo caotico (corrispondenti ai rialzamenti della chaosbowl). Ad un livello superiore di insegnamento, inoltre, ritengo molto efficace l'utilizzo dello spazio delle fasi che, dopo lo sforzo iniziale, talvolta considerevole, di astrazione, consente di agguantare molti aspetti del determinismo e dell'indeterminismo caotico con un colpo d'occhio: la presenza di traiettorie ricorrenti, come nel pendolo semplice (Fig. 1), di punti fissi, di bacini di attrazione e di attrattori. L'utilizzo dello spazio delle fasi è, peraltro, praticamente inevitabile nell'insegnamento universitario.

CAPITOLO III: QUESITI E OSSERVAZIONI

Quando si tratta l'insegnamento di un argomento poco tradizionale, è di fondamentale importanza l'osservazione dello studente, per comprenderne le intuizioni, le deduzioni spontanee e le difficoltà.
Elencherò alcuni quesiti che prendono spunto da quelli posti agli studenti da La Fata[17], riassumendo le risposte date e le osservazioni maturate dagli stessi. Riporterò alcuni dei quesiti che ho avuto modo di porre io stesso ad alcuni bambini della mia famiglia. Le mie osservazioni non pretendono di avere significatività statistica o autorevolezza scientifica, ma solo carattere esemplificativo, di spunto.
I quesiti vanno posti alternandoli alle dimostrazioni, con un inesprimibile criterio sapiente, lasciato al talento e alla preparazione dell'insegnante, che consenta di non dire troppo né troppo poco, e di "portare fuori", con scopo maieutico (o "ostetrico"), ciò che lo studente già possiede, per permettergli da un lato di creare qualcosa di nuovo col ragionamento, e dall'altro di aprirsi all'acquisizione di verità suggerite, dimostrate e trasmesse.
Credo sia anche importante consentire agli studenti di lavorare in gruppo, o comunque di discutere tra essi: le osservazioni dell'insegnante possono rivelarsi in questo caso molto preziose.

<u>UTILI QUESITI DA PORRE, con esempi di risposte tipiche e commenti</u>.

- *Come si prevede un fenomeno fisico?* Tipicamente, nella sua risposta lo studente fa riferimento al fatto che è necessario conoscerne le cause. Alcuni possono rispondere che, oltre a questo, è necessario conoscere le caratteristiche del sistema e avere un modello (una legge) che ne permetta di prevedere il comportamento. Altri possono essere confusi dalla domanda.

- *Che cos'è un evento imprevedibile?* Alcuni studenti citano il comportamento umano, che non è mai del tutto prevedibile. In affermazioni di questo tipo, si cela l'idea più spontanea per cui l'imprevedibilità è dovuta a *ignoranza epistemica*. Non sembra comune il concetto di imprevedibilità intrinseca, tipica ad esempio di alcuni processi stocastici.

- *Che cos'è un evento casuale?* Quasi tutti rispondono facendo riferimento all'imprevedibilità (è utile citare l'espressione "fare qualcosa a caso"). Di questi, alcuni credono che ciò sia dovuto all'assenza di leggi che li regolano (un punto importante su cui concentrare l'insegnamento del caos deterministico)

- *Qual è la differenza tra evento possibile e probabile?* Riporto la risposta datami da M., 8 anni: "Una cosa possibile è una cosa non impossibile" (spesso i bambini definiscono per negazione); "Una cosa probabile è una cosa ancora più possibile" (in essa è inclusa una chiara intuizione della probabilità).

- *Che cos'è un evento certo?* La risposta tipica è del tipo: "qualcosa che *sappiamo* che accadrà." È evidente l'associazione con la prevedibilità completa di un evento.

- *Se lancio una moneta, è più probabile che esca testa o croce? Perché?* G., 14 anni, mi risponde senza dubbi che la probabilità è del 50% per entrambi i risultati, ma non sa spiegarmi perché. Oltre all'ipotesi circa l'aver appreso questo concetto esternamente, posso ipotizzare che l'equiprobabilità dei due eventi sia associata alla simmetria dell'oggetto "moneta".

- *Che cos'è il caos?* Mi hanno perlopiù risposto parlandomi di una vaga idea di disordine (complice, credo, il linguaggio comune). S., 13 anni, mi parla di "continuo movimento" (che potrei associare all'idea di equilibrio instabile).

- *Secondo te, si può prevedere se tra 10 anni, il 7 Febbraio, a Napoli, ci sarà bel tempo? Perché?* Alcuni sono rimasti confusi dalla domanda. Altri mi hanno risposto di no, senza darmi spiegazioni. R., 14 anni, dice che sarebbe possibile in teoria ma non in pratica. Non mi ha saputo dare altre spiegazioni. In La Fata[17], emerge l'idea per cui sono troppe le variabili in gioco, e che può avvenire qualcosa di imprevisto. Secondo pochi, l'uomo non conosce le leggi che governano il moto dell'atmosfera.

Per quanto riguarda la probabilità, si può osservare come anche gli studenti più giovani abbiano già una vaga idea, più che del significato stesso di probabilità, di cosa vuol dire l'aggettivo probabile. Questa è una parola molto usata comunemente, e col suo giusto significato scientifico (a differenza del termine caos). Inoltre, si può osservare molto di frequente (e non solo tra i giovani studenti, si vedano i numeri "ritardatari" su cui spesso punta chi gioca al gioco del lotto) uno dei misconcetti probabilistici conosciuto come "effetto negativo dello stato recente" o "l'errore del giocatore d'azzardo" per cui se un giocatore lancia una moneta tre volte ed ottiene tre volte testa è portato a credere che la quarta volta sia più probabile che esca croce (il caso invece, come si dice, non ha memoria).

Per quanto riguarda il caos deterministico, *dall'analisi delle risposte fornite dagli studenti nel test in ingresso si evince che la maggior parte di essi classifica come deterministico e, pertanto, descrivibile mediante una legge matematica, solamente un fenomeno che mostri una qualche regolarità nella propria evoluzione temporale. Se un fenomeno mostra un comportamento "complicato", esso viene classificato come "casuale", nell'accezione del linguaggio comune, nel quale si indica con l'espressione "a caso" qualcosa che avviene senza alcuna regolarità ed in maniera del tutto imprevedibile. Molti studenti pensano o che sia impossibile descrivere un fenomeno che mostra una evoluzione temporale complessa ed irregolare mediante una legge matematica oppure ritengono che, qualora questo fosse possibile, esso necessiterebbe di strumenti matematici complessi. Per questa ragione, se un fenomeno fisico mostra un comportamento imprevedibile, ossia segue una evoluzione temporale differente ogni qual volta viene ripetuto, è classificato come un fenomeno fisico non deterministico. Oppure, alcuni studenti, interpretando semplici fenomeni caotici, pensano che il loro comportamento è dovuto all'insorgere, durante* *l'evoluzione temporale, di fattori imprevedibili che influenzano il fenomeno stesso. Molti studenti nella interpretazione dei fenomeni fisici proposti applicano un ragionamento di tipo causale lineare: a cause simili devono seguire effetti simili e risultati differenti comportano diverse cause originarie. Difficilmente considerano che possa accadere che cause assai simili possano produrre esiti totalmente differenti. Infine la maggior parte degli studenti intervistati ha dichiarato di non aver incontrato durante gli studi il termine "caos deterministico".* (La Fata [17]).

OSSERVAZIONI SULLE DIMOSTRAZIONI.

Quando ho mostrato la macchina di Galton a diversi bambini e adolescenti (e anche un paio di adulti), nessuno di essi è rimasto impassibile di fronte alla mia capacità di prevedere la distribuzione di frequenza finale, dopo l'aver notato che il percorso della singola biglia è imprevedibile. Ho constatato che, talvolta, è presente un'idea di "maggiore probabilità" delle colonne centrali che, come ho già avuto modo di osservare, personalmente associo ad un'intuizione che si lega alla simmetria del sistema, una sorta di effetto di "cancellazione degli opposti" che producono un risultato finale nullo (la biglia tende a cadere al centro). Stessa osservazione vale per la simulazione del lancio della moneta, nel caso dell'equiprobabilità.
Gli studenti sembrano non fare molta fatica ad accettare l'idea che alcuni eventi siano più probabili di altri. Tuttavia, pochi di essi sembrano associarla al concetto di *ripetibilità* (senza il concetto di evento che si ripete, non ha senso definire una probabilità), su cui credo sia il caso insistere. Inoltre, non è semplice spiegare perché, per esempio, non si può prevedere il decadimento di un singolo atomo. Credo che gli studenti si trovino più a proprio agio con l'indeterminismo dovuto a ignoranza epistemica, piuttosto che con l'indeterminismo intrinseco di tipo quantistico. Per questo, assocerei questo percorso didattico ad un percorso volto all'insegnamento della meccanica quantistica agli studenti più giovani.

Anche il pendolo caotico diverte molto, ma in un modo che è probabilmente associato più al suo particolare movimento. È facile trasmettere attraverso di esso la proprietà indeterministica dell'imprevedibilità. Tuttavia, non sempre è semplice far riflettere correttamente sulla forte sensibilità alle condizioni iniziali, che spesso turba lo studente, essendo esso abituato all'osservazione di fenomeni (e all'apprendimento di concetti) che coinvolgono la casualità forte (per cui cause simili hanno simili effetti).

Dalla lettura dell'esperienza di La Fata[17], ho potuto infine rafforzare l'idea secondo cui i bambini non sono quasi mai a disagio con cose che non capiscono (se non sono costretti a vergognarsene), ma che anzi ne risultano fortemente stimolati. Come gli adulti, sono naturalmente portati a superare l'ostacolo dell'ignoto. Adorano chiacchierare tra loro, discutere, formulare ipotesi, e sfidarsi. A nessun bambino manca la curiosità che potrebbe fare di lui uno scienziato felice.

CONCLUSIONI

Durante lo svolgimento di questo lavoro, e dalle poche osservazioni dirette da me effettuate, mi sono reso conto che l'argomento indeterministico può presentare molte difficoltà nell'apprendimento (e nell'insegnamento). Ma sono anche convinto che, se presentato nei suoi aspetti essenziali, tale difficoltà sia solo da imputare alla natura controintuitiva (o, più propriamente, assolutamente al di là dell'intuizione quotidiana) di alcuni aspetti dei fenomeni indeterministici. Non è infatti detto che uno studente abbia modo di osservare quotidianamente, e con la dovuta attenzione, un comportamento caotico o indeterministico.
Da uno studio precedente[32], risulta che *la conoscenza non è solo correlata a un processo mentale, ma include azioni epistemiche esterne attraverso le quali la costruzione del linguaggio scientifico avviene grazie all'interazione con l'oggetto fisico, quando questo viene attentamente osservato.* I fenomeno che vanno al di là della quotidianità, presentano necessariamente difficoltà maggiori di apprendimento, perché spesso non permettono di ricorrere al naturale intuito o al senso comune.
Lo stesso autore conferma in studi successivi le differenze nell'apprendimento tra studenti diversi, dovute a concezioni diverse della realtà che li circonda.
Da questi e altri lavori risulta inoltre che, spesso, un comportamento caotico o probabilistico è interpretato dagli studenti come non regolato da alcuna legge e privo di qualsiasi ordine (forse a causa del significato quotidiano del termine caos). Altri studenti, associano il comportamento imprevedibile alla presenza di molte variabili in gioco, non all'assenza di leggi matematiche.
Dalle osservazioni e dalle risposte alle domande poste, raccolte da La Fata[17], risulta che sicuramente il ragionamento analogico gioca un ruolo centrale per la comprensione delle caratteristiche del moto caotico: tutti gli studenti coinvolti nella sperimentazione apprendono che vi sono alcuni sistemi caotici la cui evoluzione non può essere predetta, che esistono zone di equilibrio stabile, che questi fenomeni imprevedibili sono simili, dal punto di vista dell'imprevedibilità, ad eventi quotidiani come il gioco della roulette.
Risulta poi necessario rafforzare l'idea di caos come associato, ad esempio, alla sensibilità rispetto alle condizioni iniziali, e non al "disordine" comunemente usato come suo sinonimo. Bisogna trasmettere l'idea poco intuitiva per cui, dietro al caos, c'è un "ordine nascosto".

Riporto adesso alcune osservazioni personali. Provenendo da una famiglia molto numerosa, sono sempre stato a contatto con tanti bambini durante tutta la mia vita, e da adulto ho ancora modo di osservarne i comportamenti, in tutte le età di interesse per un insegnante, con grande attenzione.
È facile credermi quando dico che i bambini e i ragazzi, quando stimolati, riescano a seguire l'adulto in un percorso che permette a entrambi di ricavare qualcosa di prezioso e maturare. Ma riporto anche quella che per me è un'evidenza: i bambini, e spesso anche gli adolescenti, sono sottovalutati e poco ascoltati. È un'osservazione, questa, di tipo umano, non scientifico, non avendo io altre competenze didattiche oltre a quelle acquisite durante questo corso (che mi ha dato molto più di quanto mi aspettassi, devo ammetterlo). Oltre a permettere che rifiorisse in me la passione per la Fisica che lo stress aveva messo a dura prova, questo corso mi ha consentito di crescere come scienziato (comprendendo per esempio a fondo anche alcune cose semplici che, perso nel formalismo della Matematica pura, avevo sottovalutato) e come essere umano.

Trovandomi di fronte alla necessità di provare ad insegnare un argomento, ho necessariamente dovuto colmare ogni possibile lacuna concettuale che mi rimaneva.
Inoltre, gli spunti di natura antropologica, sociologica, pedagogica ed epistemologica, oltre alla disponibilità umana e professionale da parte dell'insegnante, hanno creato un contesto ideale per il *mio* apprendimento. Così facendo, ho capito quanto sia difficile, ma anche importante, creare un ambiente di apprendimento, un'esperienza di apprendimento, più che un canovaccio di apprendimento, una ricetta di concetti messi in fila. I concetti, nella loro pura forma e astratta dal contesto umano, sono né più né meno che oggetti. Oggetti virtuali, ideali, o materializzati come pensieri nella chimica del cervello. Ma pur sempre *cose*. È la dimensione umana che conferisce *senso* al significato di un concetto.
Ho capito quanto sia importante ricordarsi che si è stati bambini, che si ha avuto paura, che è stata fatta molta fatica per adattarsi alle aspettative del mondo; che non bisogna mai dare per scontato gli altri e le azioni che li coinvolgono; e che, richiamando il pensiero della psicologia della Gestalt, che si schiera contro lo strutturalismo elementarista: come in ogni cosa, in fisica, nell'apprendimento, nella vita, il tutto è molto più della somma delle singole parti.

RIFERIMENTI, BIBLIOGRAFIA, SITOGRAFIA

[1] RIGATTI LUCHINI S. (2010), “La didattica della statistica nella scuola italiana”, Induzioni, Pisa, 40, pp. 107–118.

[2] BOLONDI G. (2010), “I nuovi programmi di matematica e statistica per il sistema dei licei”, Induzioni, Pisa, 40, pp. 27–32.

[3] MALGIERI, ONORATO, DE AMBROSIS, “Insegnare la fisica quantistica a scuola: un percorso basato sulmetodo dei cammini di Feynman” GIORNALE DI FISICA VOL. LVI, N. 1 Gennaio-Marzo 2015.

[4] STEFANEL A., “La meccanica quantistica nella scuola secondaria per formare al pensiero teoretico”, in Il mondo dei quanti, Enciclopedia Italiana Treccan, 2007, accessibile in rete all’indirizzo: www.treccani.it/site/Scuola/nella scuola/area fisica/index.htm

[5] COBB P., “Where is the mind? A coordination of sociocultural and cognitive constructivist perspectives. Constructivism: heury, Perspectives and Practice.” Teachers College Press, New York, 2005.

[6] BRIGGS K., “Simple experiments in chaotic dynamics” Am. J. Phys., 1987.

[7] CUERNO R., “Deterministic chaos in the elastic pendulum: a simple laboratory for nonlinear dynamics.” Am. J. Phys., 1992.

[8] DE SOUZA-MACHADO S., “Studying chaotic systems using microcomputer simulations and Lyapunov exponents.” Am. J. Phys., 1990.

[9] KAFTMAKHER Y., “Experiments with a magnetically controlled pendulum” Eur. J. Phys., 2007.

[10] LAWS W. P., “A unit on oscillations, determinism and chaos for introductory physics students” Am. J. Phys., 2004.

[11] PIAGET J., “Development and Learning” Journal of Research in Science Teaching, 1964

[12] SIAHMAKOUN A., “Nonlinear dynamics of sinusoidally driven pendulum in a repulsive magnetic field” Am. J. Phys., 1997.

[13] SUNGAR N., “A laboratory-based nonlinear dynamics course for science and engineering students” Am. J. Phys., 2001.

[14] VYGOTSKIJ L., “Mind in Society: The development of Higher Psychological Processes” Harvard University Press, 1978.

[15] Per un panorama in particolare sui curricula dei paesi europei e degli Statu Uniti: http://teachers.web.cern.ch/teachers/archiv/HST2001/syllabus/syllabus.htm

[16] OTTAVIANI M. G., “Insegnare ed apprendere statistica e probabilità a scuola: il problema dell’aggiornamento degli insegnanti” Dossier statistica Treccani, 2010 www.treccani.it/scuola/dossier/2010/statistica/mainArea.html

[17] LA FATA L. “Progettazione e sperimentazione di un percorso di insegnamento/apprendimento per la scuola secondaria superiore: il Caos Deterministico”, Tesi di Dottorato di Ricerca in Storia e Didattica della Matematica, Storia e Didattica della Fisica, Storia e Didattica della Chimica, Università di Palermo, 2010.

[18] Versione italiana del corso PSSC, condotta sull'edizione originale del 1960 (D.C. Heath & Co di Boston), pubblicata da Zanichelli Editore nel 1961.
Una raccolta completa di video del PSSC è disponibile all’indirizzo https://collezioni.scuola.zanichelli.it/collections/i-video-del-pssc . Il video “Eventi casuali” include l’uso della macchina di Galton.

[19] Simulatore di pendolo caotico all’indirizzo http://www.codeproject.com/KB/recipes/MagneticPendulum.aspx

[20] STRUMIA A., “Introduzione alla filosofia delle scienze”, ESD-Edizioni Studio Domenicano, 1992.

[21] HUANG K., “Meccanica statistica”, Zanichelli, 1997.

[22] THORNDIKE E. L., “The Fundamentals of Learning”, Teachers college, Columbia university, 1932.

[23] Ministero dell’istruzione – Progetto Realizzazione Laboratori per l’Educazione alla Scienza presso l’indirizzo www.les.unina.it , in particolare in “Attività didattiche”, quindi in “Probabilità e misura”.

[24] Wikipedia, per informazioni teoriche di carattere generale (https://it.wikipedia.org)

[25] Video dimostrativo all’indirizzo https://www.youtube.com/watch?v=aGiKdJ2npc4

[26] Video dimostrativo all’indirizzo https://www.youtube.com/watch?v=p65aYYuAz-s

[27] Interessante è a questo proposito l’articolo http://www.insegnareonline.com/istanze/filosofia-educazione-societa/memoria-apprendimento-emozione che fa riferimento al testo Gilbert De Landseere – André Delchambre, I comportamenti non verbali dell’insegnante, Lisciani & Giunti, Teramo, 1981.

[28] Un simulatore della macchina di Galton all'indirizzo http://www.math.uah.edu/stat/apps/GaltonBoardExperiment.html

[29] Un simulatore della macchina di Galton all'indirizzo http://www.mathsisfun.com/data/quincunx.html

[30] Un simulatore della macchina di Galton all'indirizzo https://pogil.org/resources/workshop-resources-for-participants/the-galton-box-simulator

[31] Un simulatore di pendolo semplice all'indirizzo http://www.tutto-scienze.org/2013/01/il-moto-del-pendolo-con-app-interattiva.html

[32] DUIT R., "Towards science education research that is relevant for improving practice: The model of educational reconstruction.", Developing standards in research on science education, Fischer, London 2005.

[33] BALZANO E., "Concetti e competenze matematiche nella modellizzazione di fenomeni fisici. La multi-rappresentazione nello studio del moto", Dipartimento di Scienze Fisiche dell'Università degli Studi di Napoli Federico II, 2007.

[34] CINI M., "Linguaggi scientifici e scienze della complessità", Ann.Ist.Super.Sanità, 1999.

[35] DELL'AGLIO L., intervista su "Avvenire", 20 Maggio 2010.

[36] ARONS A. B., "Guida all'insegnamento della fisica", Zanichelli Bologna 1992 (capitolo 13 pagine 399-417).