

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Magistrale in Fisica

**Evoluzione dei sistemi di corpi in interazione
gravitazionale**

Relatori:

Prof. Emilio Balzano
Prof. Rodolfo Figari

Candidato:

Pietro Piccialli
Matr. N94000357

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione	1
1 Sistemi dinamici e leggi di evoluzione	5
1.1 Dinamica classica	6
1.2 Costanti del moto	8
2 Mele, proiettili e pendoli	15
2.1 Terra puntiforme	15
2.2 Accelerazione di gravità sulla superficie terrestre	17
2.3 Moti con accelerazione costante	19
2.4 Pendoli	23
3 Il problema a due corpi	31
3.1 Equazione della traiettoria	33
3.1.1 I Diagrammi di Feynman	37
3.1.2 Il calcolo delle traiettorie con il metodo discretizzato	40
4 Il problema a tre corpi e la stabilità del sistema solare	45
4.1 Foglio di calcolo	46
4.2 Software a oggetti	50
Conclusioni	55
Ringraziamenti	57

Introduzione

Scopo del lavoro di tesi è stato quello di progettare una unità didattica sulla teoria classica della gravitazione da implementare nelle scuole medie superiori o nei primi anni universitari. In differenti classi e scuole il progetto prevede l'utilizzo di differenti strumenti laboratoriali e matematici.

Come è noto, la teoria newtoniana della gravitazione è spesso trascurata a causa di alcune peculiari criticità, tra le quali si possono citare:

- scarsa (o inesistente) conoscenza da parte degli studenti delle caratteristiche peculiari del moto dei pianeti del sistema solare osservato nel cielo notturno;
- mancata comprensione dell'idea-forza di Newton che le cause del moto dei proiettili possano essere unificate con quelle del moto dei pianeti;
- mancanza di pre-conoscenze matematiche che permettano di caratterizzare, utilizzando la seconda legge della dinamica e l'ipotesi della gravitazione universale, le possibili orbite di un pianeta attorno al sole e di verificare la validità delle leggi di Keplero (il problema a due corpi);
- difficoltà di trovare nei libri di testo trattazioni, anche solo qualitative, che vadano oltre le leggi di Keplero e che accennino alle perturbazioni osservabili delle orbite planetarie dovute alla mutua attrazione tra pianeti.

Il lavoro di tesi ha affrontato principalmente il problema di come ovviare alla mancanza di conoscenze matematiche per lo studio dei moti planetari.

Il problema di come fornire frammenti di conoscenza della dinamica osservata dei pianeti ha grandissima rilevanza particolarmente per generazioni di studenti che hanno perso abitudine e piacere di osservare il movimento degli astri nel cielo notturno. Si accennerà brevemente nel prossimo capitolo alla possibilità di utilizzare risorse sofisticate di software per riprodurre sul proprio computer o in osservazioni guidate i movimenti osservati di stelle, sole luna e pianeti.

Il nostro (del gruppo di didattica della Fisica del Dipartimento) progetto parte da alcune analisi critiche sui modi e sui tempi in cui la gravitazione universale viene trattata nei libri e insegnata nelle scuole.

Il problema matematico dei due corpi è normalmente affrontato tramite la soluzione di un'equazione differenziale e prevede la conoscenza di specifiche caratterizzazioni delle coniche. Il calcolo viene ormai spesso omissso anche nei corsi di Fisica del primo anno universitario di quasi ogni corso di laurea scientifica.

La teoria matematica delle perturbazioni in Meccanica Celeste costituisce un immenso patrimonio di tecniche analitiche noto solo agli esperti di dinamica del sistema solare. Sarebbe impossibile proporre trattazioni rigorose in questo campo anche a

livello di un corso di laurea magistrale.

D'altro canto, è necessario sottolineare che l'enorme efficacia esplicativa della teoria newtoniana della gravitazione risiede nell'unificare la causa della dinamica dei proiettili e di quella dei pianeti e, ancora di più, nel prevedere le variazioni secolari delle orbite planetarie (quindi il loro non essere kepleriane). Il punto di vista portato avanti in questo lavoro di tesi si basa essenzialmente sulle seguenti considerazioni di tipo didattico:

1. se di un corpo di teoria fisica si elencano solo le "leggi" senza alcuna possibilità di verificare di quale fenomenologia la teoria voglia dare una spiegazione e con quale efficacia ci riesca, gli studenti vedranno la Fisica come una lista di verità rivelate o di leggi normative più simile a un codice penale che a un modello interpretativo di aspetti del mondo reale.
2. I docenti hanno oggi a disposizione moltissimi supporti didattici laboratoriali e per osservazioni guidate con cui ricostruire in maniera dettagliata la fenomenologia dei fenomeni fisici. I docenti hanno inoltre a disposizione software generalmente ben noto agli studenti che permette forme semplificate di calcolo numerico con cui ogni studente può verificare aspetti qualitativi e quantitativi della dinamica di sistemi complessi.

Partendo da queste considerazioni, si è voluto progettare alcuni percorsi didattici per l'insegnamento della teoria classica della gravitazione. I differenti percorsi provano a adattarsi alle conoscenze matematiche pregresse di differenti platee di studenti. Nelle nostre intenzioni, tutti i percorsi vogliono portare gli studenti a comprendere la struttura del modello e la sua miracolosa potenza esplicativa dei fenomeni osservati e a poter affrontare autonomamente calcoli espliciti almeno in casi semplici. Nel primo capitolo verrà introdotta e giustificata la forma discretizzata delle equazioni del moto. Verranno quindi provati, in questa forma, i teoremi della dinamica del punto materiale necessari per una trattazione completa del problema a due corpi. Sarà anche discussa l'utilizzazione di differenti software per il calcolo di soluzioni di equazioni di ricorrenza.

Nel secondo capitolo si affronterà la soluzione delle equazioni del moto per comprendere le caratteristiche principali del moto dei gravi nelle vicinanze della superficie terrestre.

Nel terzo capitolo sarà introdotto e risolto il problema a due corpi in interazione gravitazionale. Preliminarmente verrà fatto uso di tecniche analitiche, introdotte all'inizio del secolo scorso, che utilizzano nozioni elementari di calcolo differenziale e sono quindi adatte per la presentazione del problema a studenti degli ultimi anni di Licei Scientifici e Istituti Tecnici. Gli stessi risultati verranno poi ritrovati facendo uso di una discretizzazione temporale della seconda equazione della dinamica, nello spirito dei cosiddetti diagrammi di Newton. Alla fine del capitolo verranno riportate le soluzioni del problema a due corpi (in forma di animazione) ottenute con software di Fisica "a oggetti".

Nel quarto capitolo sarà affrontato il problema a tre corpi. Utilizzando forme semplificate di calcolo di soluzioni di leggi di ricorrenza e/o di software a oggetti verranno

proposte analisi guidate alle perturbazioni secolari, alla stabilità del sistema solare e ai sistemi caotici.
Seguiranno alcune pagine di conclusioni.

Capitolo 1

Sistemi dinamici e leggi di evoluzione

Dalla metà del secondo secolo dopo Cristo, fino alla stampa del *De Revolutionibus orbium caelestium* di Copernico, nella prima parte del XVI secolo, la base per la descrizione dei moti planetari era stato il modello geocentrico a eccentrici, equanti e epicicli formalizzato nell'*almagesto* da Tolomeo che riusciva, con sempre più evidenti difficoltà, a prevedere le posizioni di Sole, Luna e dei cinque pianeti osservabili ad occhio nudo. In effetti il problema fu quasi totalmente trascurato nel periodo romano e nell'alto medio evo alla fine del quale vennero rese disponibili le prime traduzioni in latino dell'*Almagesto*.

Né Tolomeo né Copernico intesero proporre ipotesi dinamiche che indicassero “ragioni o cause” del moto planetario osservato. Ancora Keplero, pur assumendo il sistema eliocentrico copernicano, formula le sue leggi sul moto dei pianeti del sistema solare solo sulle precisissime osservazioni fatte da lui e, in precedenza, dal suo maestro Tycho Brahe.

Ci sono ormai evidenze del fatto che in periodo ellenistico, tre secoli prima di Cristo, la scienza alessandrina abbia prodotto le prime idee sull'inerzia dei corpi e su una forza centrale attrattiva responsabile dell'incurvarsi verso il sole dell'orbita dei pianeti. Dopo meno di tre secoli i risultati e le osservazioni dei matematici-fisici-astronomi alessandrini non erano neppure più compresi e solo alcuni dei loro scritti furono riscoperti, dopo oltre mille anni, nel rinascimento italiano. Per un'affascinante analisi sul giallo storico della scomparsa e ricomparsa della scienza ellenistica si vedano i lavori di L. Russo [6] [7]. Il primo testo in cui viene riportata una teoria dinamica completa dei moti naturali (quelli che avvengono senza che si osservi una causa specifica che li origina) sono i *Principia* di Newton. Non si può però affrontare e apprezzare a pieno la forza e la bellezza della teoria della gravitazione universale di Newton se non si comprendono i fenomeni osservati che la teoria voleva comprendere (di salvare nel linguaggio degli scienziati alessandrini). Da un punto di vista didattico si pone il problema che gli studenti non posseggono generalmente esperienza di osservazione dei moti dei pianeti (moti errabondi secondo l'etimologia). Sono oggi a disposizione alternative all'osservazione prolungata del cielo e alla pratica delle misure astronomiche. Esistono software di astronomia che riproducono la vista che un osservatore, in una posizione prefissata sulla terra, avrebbe, avrebbe avuto o avrà in qualunque direzione del cielo per un numero di anni qualunque nel passato e nel futuro. Il software permette di avere istantanee a distanza temporale che lo studente può scegliere. In particolare, fissando l'intervallo a un giorno solare o siderale, lo studente può riconoscere i moti erratici dei pianeti rispetto a sole e

stelle, comprendendo la difficoltà dell'astronomia antica di inquadrare il moto dei pianeti come astri su sfere celesti in moto uniforme.

Quando sia nota la fenomenologia osservata, la teoria Newtoniana dei moti naturali costituisce un modello matematico inteso a spiegare, tramite la forza gravitazionale e le equazioni della dinamica, contemporaneamente i moti dei gravi e dei pianeti. In questo senso la teoria verrebbe oggi catalogata come un capitolo della teoria dei sistemi dinamici deterministici. Un sistema dinamico è un modello matematico in grado di fornire un quadro interpretativo dell'evoluzione nel tempo di un fenomeno tramite leggi di evoluzione che legano il valore presente delle variabili che caratterizzano il sistema reale in esame a quello futuro e/o passato.

I sistemi **deterministici** sono per definizione quelli per i quali vale una legge d'evoluzione che, una volta noto lo stato iniziale del sistema, permette in principio di determinare con certezza lo stato ad ogni istante di tempo successivo.

1.1 Dinamica classica

Si deve a Newton l'idea che le ragioni e le modalità del moto dei corpi potessero essere riconducibili ad un'unica causa - la forza agente su di essi - espressione dell'interazione con gli altri corpi. Si noti come, nel caso dei moti naturali, non esista un meccanismo osservabile di trasmissione della forza e la legge di forza vada necessariamente assunta come ipotesi. Ipotizzate le forze (generalmente variabili in maniera continua a seconda della posizione del corpo) operanti sul corpo, *come era possibile ricostruire la sua traiettoria come conseguenza di una infinità continua di azioni agenti sul corpo stesso?* In casi particolarmente semplici, come quelle di corpi soggetti a forze - e quindi accelerazioni - costanti (ad esempio la caduta di un grave nelle vicinanze della superficie terrestre) la soluzione era già nota a Galileo. La ricostruzione del moto dei pianeti del sistema solare dalla sola ipotesi dell'esistenza della forza di gravitazione universale costituiva però un problema decisamente più complicato.

Nel caso più accessibile al calcolo, quello del problema a due corpi, Newton propose un "protocollo" di calcolo a cui ci si riferisce con il nome di **metodo dei "diagrammi di Newton"**¹ [1] che si può sintetizzare come segue

- La legge fondamentale "un corpo soggetto a una forza \vec{F} , generalmente dipendente dalla sua posizione, subisce una accelerazione pari alla forza su di esso applicata divisa per la sua massa" veniva sostituita con la legge equivalente "La variazione della velocità di un corpo nell'intervallo di tempo $(t, t + \tau)$ è pari all'impulso della forza su di esso applicata in quello stesso intervallo di tempo diviso per la sua massa".
- Per τ "piccolo" la variazione di velocità del corpo alla fine dell'intervallo è calcolata assumendo la forza costante durante tutto l'intervallo di tempo

¹Questa denominazione non è usata diffusamente in letteratura, ma viene utilizzata nel libro *Feynman Lost Lecture* di Goodstein e Goodstein

- La traiettoria è ottenuta come limite geometrico della spezzata che si ottiene quando il moto è considerato lineare e uniforme durante ogni intervallo di ampiezza τ .

Assumendo puntiforme il corpo in esame, nell'analisi del suo moto tra il tempo 0 e il tempo T , consideriamo le variabili cinematiche posizione e velocità ai tempi $\tau, 2\tau, \dots, N\tau$ con $\tau = T/N$ per grandi valori di N . Per semplificare la notazione, la posizione e la velocità all'istante $i\tau$ con $i < N$ saranno indicate con \vec{r}_i e \vec{v}_i . La seguente uguaglianza vettoriale esprime il fatto che il vettore spostamento totale $\vec{r}_T - \vec{r}_0$ può essere scritto come somma di tutti gli N spostamenti

$$\begin{aligned} \vec{r}_T - \vec{r}_0 &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \dots + (\vec{r}_T - \vec{r}_{N-1}) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{i=N} (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}) \end{aligned}$$

o analogamente

$$\vec{r}_T = \vec{r}_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1})}{\tau} \tau$$

che possiamo scrivere

$$\vec{r}_T = \vec{r}_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \vec{v}_{i-1,i} \tau \quad (1.1)$$

dove ciascuno spostamento è dato dalla velocità "media" (nell'intervallo di tempo) per la durata dell'intervallo di tempo stesso.

Analogamente per il vettore velocità si ha:

$$\begin{aligned} \vec{v}_T = \vec{v}_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \frac{(\vec{v}_i - \vec{v}_{i-1})}{\tau} \tau \\ \vec{v}_T = \vec{v}_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \vec{a}_{i-1,i} \tau. \end{aligned} \quad (1.2)$$

La strategia delineata prima (i diagrammi di Newton) ammontano a considerare nelle uguaglianze 1.1 e 1.2, le velocità medie e le accelerazioni medie uguali rispettivamente alle velocità e alle accelerazioni che il corpo aveva all'inizio dell'intervallo di tempo e a scrivere le equazioni del moto in ciascun intervallo di tempo nella forma

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \vec{v}_i \tau \\ \vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \left(\vec{F}(\vec{r}_i)/m \right) \tau \end{cases} \quad (1.3)$$

²si noti che l'eguaglianza (1.1) vale per qualunque suddivisione di $(0, T)$ $0 < t_1 < t_2 \dots < t_{N-1} < T$ nella forma

$$\vec{r}(T) = \vec{r}(0) + \sum_{i=1}^{i=N} \frac{(\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1})$$

La caratterizzazione delle funzioni per le quali esiste il "limite" dell'uguaglianza quando l'ampiezza di tutti gli intervalli $(t_i - t_{i-1})$ tende a 0 ($\vec{r}(T) - \vec{r}(0) = \int_0^T \vec{v}(s) ds$) costituisce il cuore della prova del teorema fondamentale del calcolo. È intuitivo comunque aspettarsi che l'eguaglianza continui a valere se si sa a priori che le forze, quindi le accelerazioni e quindi le variazioni di velocità rimangono limitate

dove $F(\vec{r}(t))$, forza che agisce sul corpo all'istante t , deve essere nota a-priori.

L'equazione "approssimata" (1.3) è una relazione di ricorrenza ottenuta per discretizzazione della variabile tempo. Note le condizioni iniziali $\vec{r}(0), \vec{v}(0)$, l'evoluzione approssimata è univocamente determinata ad ogni tempo $i\tau$. L'evoluzione "vera" sarà (per definizione) l'evoluzione limite per τ molto piccolo.

Il calcolo esplicito dei valori dell'iterazione può essere fatto con qualsiasi metodo più o meno automatizzato di computazione e fornirà la soluzione della (1.3) come successione di valori e/o in forma grafica.

In un foglio elettronico i dati sono ottenuti con un procedimento costituito da ripetuti copia-incolla, permettendo di risolvere il problema dell'evoluzione del sistema in maniera semplice e intuitiva. L'interpolazione dei valori automaticamente operata nel foglio elettronico al momento della graficazione dei dati avvicina al limite per piccoli τ della soluzione. In questo tipo di introduzione le equazioni di ricorrenza (1.3) non vanno interpretate come calcolo numerico delle soluzioni delle equazioni del moto espresse in forma di equazione differenziale, ma come significato intuitivo delle leggi del moto espresse come prescrizione di ricerca delle soluzioni.

Un altro strumento che verrà usato nel seguito e che, a nostro parere, può avere grande rilevanza in didattica della Meccanica è il "software a oggetti", che ha il vantaggio di essere uno strumento di calcolo più versatile e potente del foglio elettronico per il calcolo delle soluzioni delle equazioni del moto dei sistemi meccanici. La possibilità di produrre animazioni delle soluzioni aiuta inoltre gli studenti a comprendere in maniera più semplice la dipendenza dai parametri dinamici dell'evoluzione dei sistemi meccanici. Nelle applicazioni che discuteremo nel seguito analizzeremo le ragioni che rendono però necessario che il software a oggetti venga utilizzato solo dopo che lo studente abbia utilizzato metodi più intuitivi di ricerca delle soluzioni (come il foglio elettronico). Il software a oggetti può infatti essere interpretato dagli studenti come una scatola nera che fornisce soluzioni in maniera incomprensibile e oscura. A questo livello ogni considerazione su stabilità ed efficacia della (1.3) nel calcolo delle soluzioni delle equazioni del moto sarebbe prematura e fuorviante. Importante sarebbe invece far notare che una teoria completa e rigorosa dovrebbe necessariamente eliminare l'ambiguità sul significato di "piccoli" per gli intervalli della griglia temporale.

1.2 Costanti del moto

Due risultati fondamentali per la trattazione del moto planetario saranno introdotti nel seguito seguendo una trattazione che richiede la conoscenza del calcolo (riportata in rosso) e una seconda trattazione basata sull'interpretazione della seconda legge della dinamica in uno spazio-tempo discretizzato (in blu).

Consideriamo il caso di un corpo "puntiforme" sottoposto a una forza diretta costantemente verso un centro attrattore, ipotizzato fermo nell'origine della coordinate. Ipotizziamo, come fece Newton guidato dalla conoscenza delle Leggi osservazionali di Keplero inoltre che la forza sia proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dal centro attrattore.

Indicheremo con \vec{r} , \vec{v} , \vec{a} posizione, velocità e accelerazione del corpo. Le equazione del moto del corpo saranno

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{con} \quad \vec{F} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^2} \hat{r} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$

dove $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$ è il vettore di modulo unitario che indica la direzione e il verso del vettore posizione del corpo rispetto al centro attrattore. G è una costante universale, misurata sperimentalmente, il cui valore numerico dipende dal sistema di misura adottato (nel sistema internazionale (SI) $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$). Proviamo due risultati preliminari sulla dinamica di un corpo sottoposto a forza gravitazionale da un centro attrattore fermo nell'origine.

Conservazione del momento angolare

In un campo di forze centrali il momento angolare rispetto al centro attrattore si conserva infatti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \wedge \vec{v}) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = m(\vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{a})$$

per definizione di forza centrale \vec{r} e \vec{a} sono sempre parallele e di conseguenza

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Conservazione dell'energia

La potenza che una forza esercita su un corpo puntiforme in generale è data da

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2}(\vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{a}) = \frac{m}{2} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m|\vec{v}|^2}{2} \right)$$

Calcolando questa espressione nel caso specifico di un corpo soggetto alla forza gravitazionale otteniamo

$$-\frac{mMG}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \cdot \vec{v} = -\frac{mMG}{|\vec{r}|^2} \frac{d|\vec{r}|}{dt} = \frac{d}{d|\vec{r}|} \left(\frac{mMG}{|\vec{r}|} \right) \frac{d|\vec{r}|}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mMG}{|\vec{r}|} \right)$$

dove si è utilizzato che

$$\frac{d|\vec{r}|^2}{dt} = 2\vec{r} \cdot \vec{v} \quad \text{assieme a} \quad \frac{d|\vec{r}|^2}{dt} = \frac{d|\vec{r}|^2}{d|\vec{r}|} \frac{d|\vec{r}|}{dt} = 2|\vec{r}| \frac{d|\vec{r}|}{dt} \implies \frac{d|\vec{r}|}{dt} = \hat{r} \cdot \vec{v}$$

con $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.

Le due eguaglianze dicono che, per un corpo soggetto alla forza gravitazionale di una massa fissa nell'origine delle coordinate, vale ad ogni istante

$$\left(\frac{m|\vec{v}|^2}{2} \right) - \left(\frac{mMG}{|\vec{r}|} \right) = \text{costante} = \left(\frac{m|\vec{v}_0|^2}{2} \right) - \left(\frac{mMG}{|\vec{r}_0|} \right)$$

Conservazione del momento angolare in forma approssimata

Per definizione il momento della quantità di moto al tempo $i\tau$ è

$$\vec{L}_i \equiv m\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$$

La variazione del vettore \vec{L} tra gli istanti t_i e t_{i+1} sarà

$$\begin{aligned} \vec{L}_{i+1} - \vec{L}_i &= m\vec{r}_{i+1} \wedge \vec{v}_{i+1} - m\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i \\ &= m(\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i) \wedge \vec{v}_{i+1} + m\vec{r}_i \wedge (\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i) \\ &= m\vec{v}_i \wedge \vec{v}_{i+1}\tau + m\vec{r}_i \wedge \vec{a}_i\tau \end{aligned}$$

Tenendo conto che il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso è sempre nullo, il primo termine nell'ultima uguaglianza può scriversi $m\vec{v}_i \wedge (\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i)\tau = m\vec{v}_i \wedge \vec{a}_i(\tau)^2$. Il secondo termine è nullo se la forza e quindi l'accelerazione del punto materiale è a ogni istante parallela al raggio vettore (forza centrale). In questo caso si avrà:

$$\vec{L}_{i+1} - \vec{L}_i = m\vec{v}_i \wedge \vec{a}_i(\tau)^2 = m\vec{v}_i \wedge \vec{a}_i \left(\frac{T^2}{N^2} \right)$$

Nel caso di forze centrali, la variazione del momento della quantità di moto tra l'istante iniziale e un qualunque istante T sarà allora:

$$\vec{L}_T - \vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{i=N} (\vec{L}_{i+1} - \vec{L}_i) = \frac{T^2}{N} \sum_{i=1}^{i=N} \vec{v}_i \wedge \frac{\vec{F}_i}{N}$$

Per ogni traiettoria in cui si possa sapere a priori che la forza massima rimane finita (nel caso gravitazionale è sufficiente che la distanza tra i corpi non si riduca indefinitamente) l'ultima relazione afferma che il momento della quantità di moto rimane costante per forze centrali.

Conservazione dell'energia in forma approssimata

Se si vuole utilizzare la forma approssimata dell'equazione di evoluzione, bisogna provare che, in ciascun intervallo di tempo di ampiezza τ , la variazione di energia cinetica è uguale ed opposta alla variazione di energia potenziale, a meno di errori che diventano sempre più piccoli quanto più τ diventa piccolo. Bisogna naturalmente anche provare che, se anche i singoli errori si sommassero concordemente nell'intervallo $[0, T = N\tau]$, l'errore totale sarebbe sempre più piccolo quando τ diventa piccolo.

I prerequisiti matematici non includono, in questo caso, la conoscenza del calcolo infinitesimale, ma continuano a includere conoscenze elementari di algebra vettoriale: definizione di prodotto scalare tra vettori e sue proprietà (in particolare commutatività e distributività e uguaglianza tra il modulo quadro di un vettore e il prodotto scalare del vettore con se stesso), definizione di versore di un vettore e la sua espressione in termini del vettore e del suo modulo). Deve essere anche nota la definizione di radiante e la misura degli angoli in radianti. Il "teorema delle forze vive" o "teorema dell'energia cinetica" si prova, a meno di quantità sempre più piccole per piccoli τ , con pochi semplici passaggi algebrici

$$\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = m \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{m}{\tau} (\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i = \frac{m}{\tau} (\vec{v}_{i+1} \cdot \vec{v}_i - |\vec{v}_i|^2)$$

per trovare un'espressione del prodotto scalare $\vec{v}_{i+1} \cdot \vec{v}_i$ in termini di quantità che si comportano in maniera diversa per τ piccolo, notiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i|^2 &= \frac{1}{2}(\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i) \cdot (\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i) \\ &= \frac{1}{2}(|\vec{v}_{i+1}|^2 + |\vec{v}_i|^2) - \vec{v}_{i+1} \cdot \vec{v}_i \end{aligned}$$

Sostituendo nella precedente uguaglianza

$$\begin{aligned} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i &= \frac{m}{2\tau}(|\vec{v}_{i+1}|^2 - |\vec{v}_i|^2) - \frac{m}{2\tau}|\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i|^2 \\ &= \frac{1}{\tau}(E_{cin_{i+1}} - E_{cin_i}) - \frac{m\tau}{2}|\vec{a}_i|^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

che prova, per valori della forza (e quindi dell'accelerazione) limitati e intervalli di tempo τ molto piccoli, l'uguaglianza tra la **velocità di variazione dell'energia cinetica** ($E_{cin_i} \equiv \frac{1}{2}m|\vec{v}_i|^2$) e la **potenza della forza** $\equiv \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$.

Una forma "globale" della stessa uguaglianza si ottiene sommando la precedente, moltiplicata per l'ampiezza dell'intervallo di tempo, e sommata su tutti i tempi $\{i\tau\}_0^{N-i}$

$$\begin{aligned} E_{cin_T} - E_{cin_0} &= E_{cin_1} - E_{cin_0} + E_{cin_2} - E_{cin_1} + \dots + E_{cin_T} - E_{cin_{N-1}} \\ &= \vec{F}_0 \cdot \vec{v}_0 \tau + \dots + \vec{F}_{N-1} \cdot \vec{v}_{N-1} \tau - \frac{m\tau^2}{2} \sum_{i=0}^{N-1} |\vec{a}_i|^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Per rendersi conto che l'ultimo termine nella precedente uguaglianza è molto piccolo quando la divisione dell'intervallo di tempo $(0, T)$ è molto fitta (quindi $\tau = T/N$ è molto piccolo) basta notare che

$$\frac{m\tau^2}{2} \sum_{i=0}^{N-1} |\vec{a}_i|^2 = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |\vec{F}_i|^2 \right) \frac{1}{N}.$$

Se il valor medio del modulo al quadrato della forza (il termine in parentesi tonda) rimane limitato lungo la traiettoria, come capita sempre per traiettorie che non si avvicinano troppo all'origine, il valore di questo termine è tanto più piccolo quanto più grande è N . Se definiamo **lavoro** della forza nell'intervallo $i\tau, (i+1)\tau$ il valore del prodotto scalare $\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \tau = \vec{F}_i \cdot (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i)$ l'uguaglianza (1.5), trascurando termini piccoli per N molto grande, asserisce che "La variazione dell'energia cinetica tra l'inizio e la fine della traiettoria del un corpo puntiforme è uguale al lavoro totale fatto dalla forza sul corpo lungo la traiettoria"

Specializziamo il risultato appena trovato alla forza gravitazionale, calcolandone la potenza ad ogni istante $\{i\tau\}_0^{N-i}$ della nostra griglia dei tempi.

Scriviamo intanto l'espressione della forza gravitazionale in forma vettoriale: sappiamo che la forza esercitata dal centro attrattore (che abbiamo assunto nell'origine) su un corpo puntiforme (basterà che il corpo sia ad una distanza dall'origine grande rispetto alle sue dimensioni lineari)

- ha modulo proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro di attrazione:
- ha la direzione della congiungente il centro attrattore con il corpo:
- è attrattiva, quindi ha verso opposto al vettore posizione del corpo che congiunge il centro attrattore con il corpo.

In forma vettoriale

$$F_G = -G \frac{M m}{|\vec{r}|^2} \hat{r} = -G \frac{M m}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -G \frac{M m}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$

dove M indica la massa del “sole” (il centro attrattore), m la massa del corpo (il “pianeta”), G la costante di proporzionalità che dipende dal sistema di unità di misura usato e il segno - indica che la forza spinge verso il sole,

Nel Sistema Internazionale nel quale le masse sono misurate in chilogrammi massa Kg , le lunghezze in metri m e i tempi in secondi s la costante di gravitazione universale G ha il valore $6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2 Kg^{-2}$, dove N indica il Newton, unità di forza, che è la forza che dà a un corpo di massa pari a $1Kg$ l’accelerazione di $1 m/s^2$. Per semplicità di notazione indicheremo con K la costante $G M m$.

Un po’ di algebra mostrerà che la potenza della forza gravitazionale ad ogni istante $i\tau$, a meno di termini piccoli per piccoli τ , è data da

$$-\frac{K}{|\vec{r}_i|^3} \vec{r}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{\tau} \left(\frac{K}{|\vec{r}_{i+1}|} - \frac{K}{|\vec{r}_i|} \right) \quad (1.6)$$

Nel seguito indagheremo la possibilità che esistano soluzioni delle equazioni del moto del pianeta che descrivano traiettorie che avvengono in una regione limitata di spazio, senza avvicinarsi mai troppo al sole. In una regione simile la forza gravitazionale agente sul pianeta sarà sempre finita e così saranno quindi le accelerazioni e le velocità del pianeta. Se le distanze sole-pianeta si mantengono grandi rispetto alle loro dimensioni lineari, continuerà inoltre a valere l’approssimazione di considerarli entrambi puntiformi, cioè corpi di dimensioni lineari trascurabili.

Facciamo una lista delle quantità che diventano sempre più piccole quanto più l’ampiezza τ degli intervalli in cui abbiamo diviso l’intervallo $(0, T = N\tau)$ diventa piccola. Il caso più semplice da considerare è lo spazio percorso nell’intervallo $(i\tau, (i+1)\tau)$. Quando la velocità è finita $|\vec{v}_i|\tau$ risulta evidentemente piccolo quanto più τ è piccolo. Due quantità che differiscono per termini di questo tipo si definiranno uguali a meno di termini piccoli e al posto del simbolo = utilizzeremo il simbolo \sim

- $$\frac{1}{\tau} |\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i|^2 = \frac{1}{\tau} (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i) \cdot (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i) = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \tau, \quad \text{è piccolo}$$

- $$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i) \cdot (\vec{r}_{i+1} + \vec{r}_i) &= \frac{1}{\tau} (|\vec{r}_{i+1}|^2 - |\vec{r}_i|^2) = \\ &= \frac{1}{\tau} (|\vec{r}_{i+1}| - |\vec{r}_i|)(|\vec{r}_{i+1}| + |\vec{r}_i|) \\ \longrightarrow |\vec{r}_{i+1}| - |\vec{r}_i| &= \frac{\vec{v}_i \cdot (\vec{r}_{i+1} + \vec{r}_i)}{|\vec{r}_{i+1}| + |\vec{r}_i|} \tau \quad \text{è piccolo} \end{aligned}$$

•

$$\frac{1}{|\vec{r}_i|} - \frac{2}{|\vec{r}_{i+1}| + |\vec{r}_i|} = \frac{|\vec{r}_{i+1}| - |\vec{r}_i|}{(|\vec{r}_{i+1}| + |\vec{r}_i|)|\vec{r}_i|}$$

$$\rightarrow \frac{1}{|\vec{r}_i|} \sim \frac{2}{|\vec{r}_{i+1}| + |\vec{r}_i|}$$

•

$$\frac{1}{|\vec{r}_i|^3} \frac{(\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i) \cdot (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i)}{\tau} \quad \text{è piccolo}$$

$$\rightarrow \frac{1}{|\vec{r}_i|^3} \frac{\vec{r}_i \cdot (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i)}{\tau} \sim \frac{1}{|\vec{r}_i|^3} \frac{\vec{r}_{i+1} \cdot (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i)}{\tau}$$

Siamo ora in grado di verificare l'uguaglianza (1.6) a meno di termini piccoli per τ piccoli

$$\begin{aligned} \vec{F}_{G_i} \cdot \vec{v}_i &= -\frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3} \cdot \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\tau} \\ &\sim -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{|\vec{r}_i|^3} \frac{\vec{r}_i \cdot (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i)}{\tau} + \frac{1}{|\vec{r}_i|^3} \frac{\vec{r}_{i+1} \cdot (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i)}{\tau} \right) \\ &= -\frac{1}{2|\vec{r}_i|^2} \frac{1}{|\vec{r}_i|} \frac{|\vec{r}_{i+1}|^2 - |\vec{r}_i|^2}{\tau} \\ &\sim -\frac{1}{2|\vec{r}_i|^2} \frac{2}{|\vec{r}_{i+1}| + |\vec{r}_i|} \frac{|\vec{r}_{i+1}|^2 - |\vec{r}_i|^2}{\tau} \\ &= -\frac{1}{|\vec{r}_i|^2} \frac{|\vec{r}_{i+1}| - |\vec{r}_i|}{\tau} \\ &= -\frac{1}{|\vec{r}_i|^2 |\vec{r}_{i+1}|} \frac{|\vec{r}_{i+1}|^2 - |\vec{r}_{i+1}| |\vec{r}_i|}{\tau} \\ &= \frac{1}{|\vec{r}_i|^2 |\vec{r}_{i+1}|} \frac{|\vec{r}_i|^2 - |\vec{r}_{i+1}| |\vec{r}_i| - (|\vec{r}_{i+1}| - |\vec{r}_i|)^2}{\tau} \\ &\sim \left(\frac{1}{|\vec{r}_{i+1}|} - \frac{1}{|\vec{r}_i|} \right) \frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

Vale quindi la relazione (1.6) quando τ è piccolo. Unita al teorema dell'energia cinetica (1.4) se ne deduce l'uguaglianza

$$\frac{m}{2} |\vec{v}_{i+1}|^2 - \frac{K}{|\vec{r}_{i+1}|} = \frac{m}{2} |\vec{v}_i|^2 - \frac{K}{|\vec{r}_i|}$$

che ci dice che ad ogni tempo t la quantità $\frac{m}{2} |\vec{v}(t)|^2 - \frac{K}{|\vec{r}(t)|}$ rimane costante durante il moto.

Capitolo 2

Mele, proiettili e pendoli

2.1 Terra puntiforme

La trattazione del moto dei corpi soggetti a gravità nelle vicinanze della superficie terrestre non richiede matematica avanzata se si assume che la forza di gravità su un corpo di massa m vari molto poco fino a quote piccole rispetto al raggio terrestre. A sua volta questa assunzione è una conseguenza semplice del risultato che un corpo sferico massivo di massa totale M , con densità di massa dipendente solo dalla distanza dal suo centro, attira un corpo puntiforme come l'attirerebbe una massa M , puntiforme, posta nel suo centro. La dimostrazione di quest'ultimo risultato è contenuta nei *Principia* di Newton, ma non è di facile lettura. Il calcolo integrale permette di darne una dimostrazione semplice, in particolare se preliminarmente si dimostra la "Legge di Gauss" sul flusso del campo gravitazionale. Per una platea studentesca che non conosca il calcolo integrale è necessario riprendere il metodo di dimostrazione di Newton dove il processo di limite di somme di infinitesimi non viene ancora completamente formalizzato. Nel seguito viene data una versione della prova del risultato in forma ancora meno formalizzata.

Il risultato si basa sul calcolo delle aree di particolari sezioni coniche. La figura (2.1) rappresenta un cono e tre sezioni coniche $\Delta S, \Delta S', \Delta S_1$ (la notazione non distinguerà il luogo geometrico dalla sua area). La prima è la sezione circolare con un piano perpendicolare all'asse del cono a distanza R dal vertice. $\Delta S'$ è la sezione con un piano ruotato di un angolo β rispetto al primo; come si vede dalla figura è un'ellisse con semiasse minore uguale al raggio di ΔS e semiasse maggiore uguale al raggio di ΔS diviso per il coseno dell'angolo β . ΔS_1 è la sezione circolare con un piano perpendicolare all'asse a distanza 1 dal vertice.

Per similitudine il raggio di ΔS è uguale a R volte il raggio di ΔS_1 . Sulle aree dei corrispondenti dischi vale quindi che

$$\Delta S = \Delta S' \cos \beta = \Delta S_1 R^2$$

Se si considerano aperture del cono molto piccole, le aree delle calotte sferiche e delle sezioni coniche tenderanno a essere identiche (vedi figura (2.2)) e la relazione appena scritta rimarrà vera per le aree delle calotte sulla sfera di raggio R interne al cono.

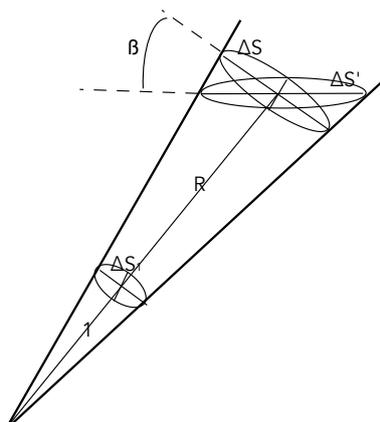


Figura 2.1: rapporti delle aree di sezioni coniche

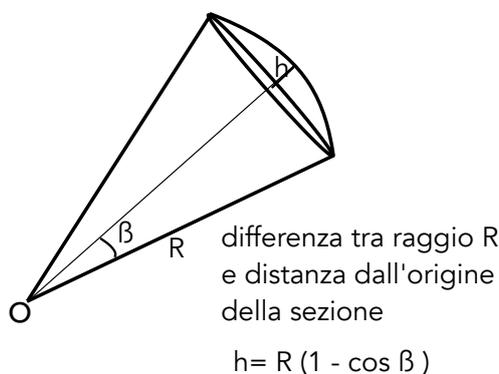


Figura 2.2: quando β diventa piccolo anche $h = R(1 - \cos \beta)$ è molto piccolo

Vogliamo preliminarmente calcolare la forza con cui una massa puntiforme m attrae una piccola parte di guscio sferico sul quale è distribuita uniformemente una massa μ con densità $\sigma = \mu/4\pi R^2$, all'interno del quale si trova la massa m .

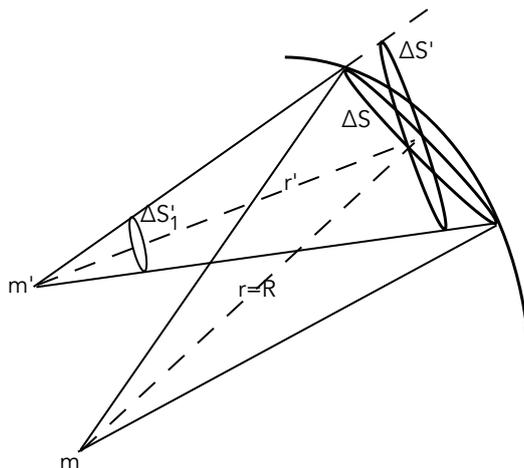
Il calcolo è particolarmente semplice quando la massa puntiforme è posta nel centro del guscio.

In questo caso infatti la forza su ogni calotta sferica di area ΔS è diretta verso il centro e, per una piccola calotta, perché la carica su di essa possa essere considerata puntiforme, vale $\frac{Gm\sigma\Delta S}{R^2}$. In particolare la somma dei moduli delle forze su tutte le calotte che compongono la superficie sferica vale

$$\frac{Gm\sigma \sum \Delta S}{R^2} = \frac{Gm\sigma 4\pi R^2}{R^2} = \frac{1}{4\pi R^2} Gm\mu 4\pi = \frac{Gm\mu}{R^2}$$

Nel caso in cui la massa puntiforme non sia al centro (come la massa m' nella figura successiva) proviamo che la somma delle componenti radiali della forza ha lo stesso valore. La forza che m' esercita sulla piccola calotta del guscio è diretta verso m' e vale $\frac{Gm'\sigma\Delta S}{R^2}$. La componente radiale (diretta verso m) della stessa forza vale quindi

$$\frac{Gm'\sigma\Delta S \cos \beta}{R^2} = \frac{Gm'\sigma\Delta S'}{R^2} = Gm'\sigma\Delta S'_1 = \frac{Gm'\mu\Delta S'_1}{4\pi R^2}$$


Figura 2.3: forze sul guscio da punti differenti

dove abbiamo indicato con β l'angolo tra gli assi dei due coni, con $\Delta S'$ l'area della sezione conica con un piano perpendicolare all'asse con vertice in m' a distanza r' dal vertice e con $\Delta S'_1$ un'analoga sezione a distanza 1 dal vertice. Sommando tutti i moduli delle componenti radiali, come precedentemente e tenendo conto che la somma dei $\Delta S'_1$ dà l'area 4π della sfera di raggio 1 si ottiene come nel caso precedente che la somma delle componenti radiali delle forze sulla massa μ vale $\frac{Gm'\mu}{R^2}$.

In sintesi la somma delle forze radiali agenti sul guscio massivo di raggio R ha sempre lo stesso valore indipendentemente dalla posizione della massa puntiforme all'interno del guscio sferico. Siamo ora in grado di formulare il risultato cercato: la forza che un corpo sferico di raggio r , di massa totale M , con massa distribuita in maniera invariante per rotazione (la densità di massa dipende solo dalla distanza dal centro della sfera) esercita su una massa puntiforme di massa m a distanza R dal centro della sfera è uguale alla forza che una massa puntiforme di massa M posta nel centro della sfera eserciterebbe sulla massa m .

Per motivi di simmetria la forza esercitata dalla sfera su ogni piccola calotta del guscio è diretta verso il centro della sfera. La somma dei moduli delle forze radiali che ogni massa puntiforme m_i in cui può essere decomposta la sfera esercita sul guscio è, come abbiamo visto, pari a $\frac{Gm_i\mu}{R^2}$, da cui si deduce che la somma del modulo delle forze radiali esercitate dalla sfera sul guscio è $\frac{GM\mu}{R^2}$. Sempre per motivi di simmetria la forza esercitata dalla sfera su masse puntiformi uguali m in cui può essere suddiviso il guscio saranno dunque uguali e pari a $\frac{GMm}{R^2}$.

2.2 Accelerazione di gravità sulla superficie terrestre

Una volta mostrato che da un punto di vista della forza gravitazionale una sfera con densità che dipende solo dal raggio è equivalente ad un punto materiale di pari massa posto nel centro della sfera, è facile rendersi conto che nel caso della terra

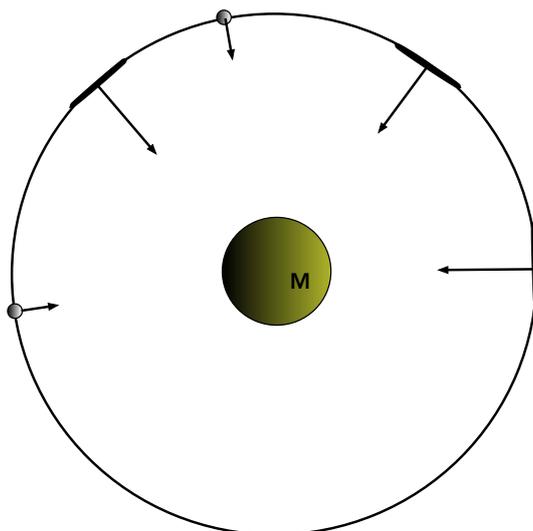


Figura 2.4: La forza esercitata dalla massa sferica su qualunque piccolo tratto della massa μ è radiale e uguale su tratti uguali

tutti i corpi nei pressi della superficie terrestre sono sottoposti a una forza che non varia sensibilmente al variare della quota, e di conseguenza che la loro accelerazione è costante ed indipendente dalla massa. Per prima cosa è immediato vedere che l'accelerazione di un corpo, dal secondo principio della dinamica risulta essere in generale $\vec{a} = \vec{F}/m$. Nel caso poi di due corpi in interazione gravitazionale la forza è data dalla ben nota formula

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

sostituendo poi questa specifica espressione per la forza nella formula per l'accelerazione si ottiene l'accelerazione del singolo corpo di massa m

$$\vec{a} = -G \frac{M}{|\vec{r}|^2}$$

Come risulta evidente l'accelerazione non dipende dalla massa del corpo m , che è un primo risultato molto semplice da ricavare dalla teoria e che fu una delle scoperte fondamentali fatte da Galilei durante le sue sperimentazioni con la caduta dei gravi. Verificare che l'accelerazione a cui è sottoposto un corpo in moto libero nei pressi della superficie terrestre non varia sensibilmente con la quota è altrettanto facile; considerando due punti a quote diverse, uno posto sulla superficie terrestre e un altro posto ad altezza dal suolo h , la differenza in accelerazione in modulo è data, a parte un fattore comune, da

$$\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+h)^2} = \frac{\frac{h^2}{R^2} + \frac{2h}{R}}{R^2(1 + \frac{h}{R})^2}$$

Tenendo conto che il raggio terrestre è dell'ordine di $6 \cdot 10^6$ m e che le quote di interesse sono nell'ordine delle centinaia di metri, il numeratore di questa frazione è confrontabile con 0 e la differenza è trascurabile. Lo stesso risultato si può vedere andando a sostituire nella formula i valori per G, M , ed R e calcolando a quanto

è pari l'accelerazione sulla superficie terrestre. Prendendo come valore del raggio terrestre quello all'equatore, pari a 6378388 m si ottiene

$$a = 9,79190961 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Andando ora a una quota maggiore ma sempre nei pressi della superficie terrestre, quindi ad esempio 100 m più in alto, calcoliamo l'accelerazione con al denominatore il nuovo raggio pari a 6378488 m:

$$a = 9,791602583 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Risulta quindi evidente che per lo studio del moto nei pressi della superficie terrestre si possono trattare i corpi come se fossero sottoposti ad un'accelerazione costante.

2.3 Moti con accelerazione costante

Una volta stabilito l'andamento della forza di gravità sulla superficie terrestre, passiamo a descrivere il moto di un corpo libero. I due casi specifici che ci interessano sono quelli del moto rettilineo uniforme e quello del moto uniformemente accelerato, la cui composizione permette di descrivere poi il moto di un corpo in caduta libera. Vogliamo conoscere la posizione $x(T)$ quando l'intervallo $[0, T]$ è suddiviso in N intervalli di ampiezza $\tau = T/N$ e si analizzano le formule di ricorrenza che ad ogni passo $i = 1, 2, \dots$ forniscono $x(\frac{i}{N}T) \equiv x_i$ quando sia noto $x(\frac{i-1}{N}T) \equiv x_{i-1}$. Se l'accelerazione è costante la velocità è nota ad ogni passo e vale

$$v_i = v_0 + ia\tau$$

Il moto rettilineo uniforme è il primo caso che viene analizzato, e solitamente anche nei curriculum scolastici è il primo esempio di moto che viene presentato in quanto più semplice da descrivere. Anche se matematicamente molto semplice questo tipo di moto ha un significato concettuale fondamentale, perché descrive il moto di un corpo non sottoposto a nessuna forza ed è una diretta manifestazione del primo principio della dinamica. L'idea che lo stato di moto di un corpo persiste a meno che non viene applicata una forza allo stesso può risultare controintuitiva se confrontata con l'esperienza quotidiana, e quindi è importante insistere su questi casi soprattutto con gli studenti che sono alle loro prime esperienze con la fisica. Da un punto di vista teorico il moto rettilineo uniforme è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t \\ v(t) &= v_0 \\ a(t) &= 0 \end{aligned}$$

Data la linearità delle equazioni in questo caso specifico il metodo di discretizzazione ovviamente produce risultati esatti, infatti scrivendo

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + v_{i-1}\tau \\ v_i &= v_{i-1} = v_0 \end{aligned}$$

e andando a esplicitare la posizione al tempo $T = N\tau$ si ottiene

$$\begin{aligned} x(T) &= x_N = x_{N-1} + v_{N-1}\tau \\ &= x_{N-2} + v_{N-2}\tau + v_{N-1}\tau = \dots \\ &= x_0 + Nv_0\tau = x_0 + v_0T \end{aligned}$$

che è l'espressione analitica.

Il secondo caso di interesse è quello del moto uniformemente accelerato, che è l'altro moto con cui solitamente si iniziano i programmi di cinematica a scuola e che introduce il concetto di accelerazione, anche se ancora in maniera slegata dalla forza. L'importanza di questo moto sta nel fatto che, anche se è il caso più semplice nella miriade di possibili moti accelerati, è anche quello più facilmente osservabile in quanto è il moto di un oggetto in caduta libera e storicamente ha avuto un ruolo fondamentale per il superamento della fisica aristotelica.

Nel caso del moto uniformemente accelerato, l'espressione esatta dello spazio percorso si può ottenere anche senza bisogno di integrare due volte il secondo principio della dinamica, considerando il moto equivalente a quello di un corpo in moto rettilineo uniforme con velocità pari al valore medio della velocità nell'intervallo considerato. Infatti poiché la velocità aumenta linearmente, il moto uniforme con velocità pari a $v(\frac{T}{2})$ sovrastima lo spazio percorso dal moto reale nell'intervallo $[0, \frac{T}{2}]$ e lo sottostima esattamente della stessa quantità nell'intervallo $[\frac{T}{2}, T]$. In formule si vede facilmente, infatti

$$x(T) = x_0 + v(\frac{T}{2})T = x_0 + v_0T + (a\frac{T}{2})T = x_0 + v_0T + \frac{1}{2}aT^2$$

Questo approccio, già probabilmente noto agli arabi all'inizio del secondo millennio, è stato il metodo utilizzato da Galileo per dare un'espressione dello spazio percorso da un grave in caduta libera. Utilizzando invece il metodo discretizzato per il moto uniformemente accelerato, per la velocità la relazione di ricorrenza produce risultati esatti, mentre invece lo spazio percorso è

$$\begin{aligned} x_N &= x_{N-1} + (v_0 + (N-1)a\tau)\tau \\ &= x_{N-2} + (v_0 + (N-2)a\tau)\tau + (v_0 + (N-1)a\tau)\tau = \dots \\ &= x_0 + Nv_0\tau + \left(\sum_{i=1}^{N-1} i\right)a(\tau)^2 = x_0 + v_0T + \frac{N(N-1)}{2}a(\tau)^2 \\ &= x_0 + v_0T + \frac{N(N-1)}{2N^2}a(N\tau)^2 = x_0 + v_0T + \frac{1}{2}aT^2 - \frac{1}{2N}aT^2 \end{aligned}$$

che, per suddivisioni sempre più fitte (N grande), dà la formula esatta del moto uniformemente accelerato.

Una volta definiti i due moti e presentato l'approccio discretizzato per la loro risoluzione, il passo successivo è utilizzarli per la descrizione del caso generale di un corpo in moto libero nei pressi della superficie terrestre. Prerequisito fondamentale per questa cosa è avere delle minime conoscenze di algebra vettoriale ed avere chiaro in mente il principio di composizione dei moti, che permette di dividere il

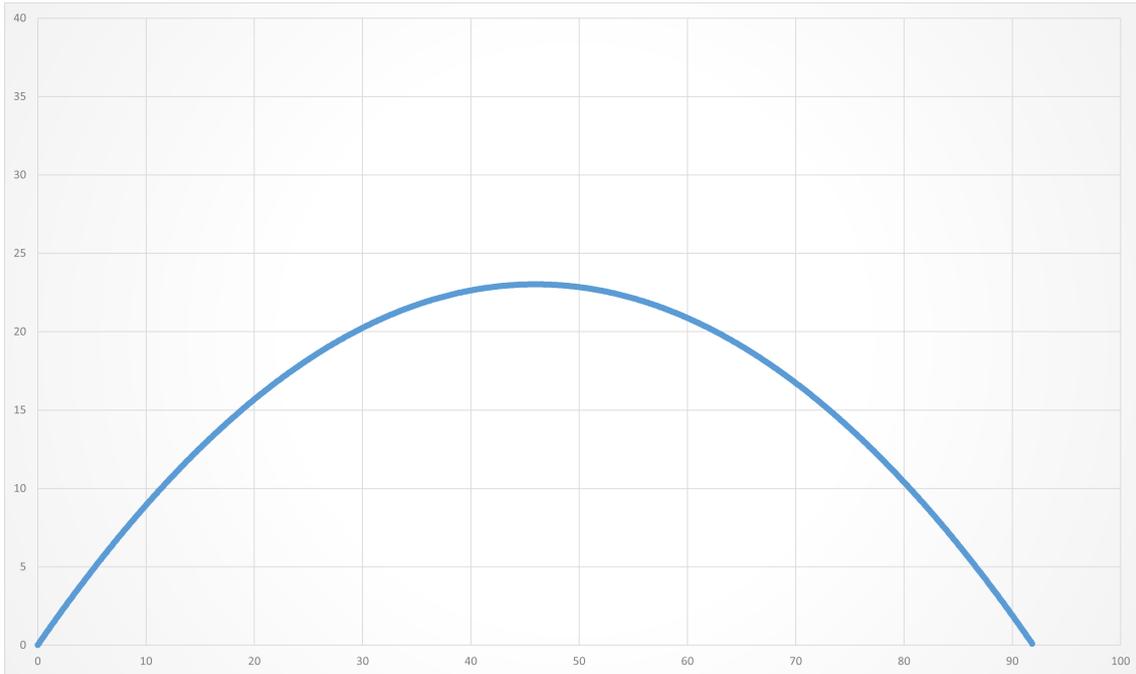


Figura 2.5: Grafico dei punti della traiettoria per il moto di un proiettile calcolati con le equazioni discretizzate

moto del proiettile nella sua componente orizzontale uniforme e in quella verticale uniformemente accelerata. Una volta stabiliti questi principi, è facile mostrare che la traiettoria è una parabola, infatti dalle equazioni;

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_{x_0}t \\y(t) &= y_0 + v_{y_0}t - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

ricavando t dalla prima e sostituendolo nella seconda otteniamo l'equazione della traiettoria in forma cartesiana

$$y = y_0 + v_{y_0} \frac{(x - x_0)}{v_{x_0}} - \frac{1}{2}g \frac{(x - x_0)^2}{v_{x_0}^2}$$

che è proprio una parabola. Utilizzando invece il foglio di calcolo e le soluzioni discretizzate è possibile far vedere la traiettoria del proiettile partendo dalla forma parametrica della stessa, in maniera più diretta e intuitiva e ponendo l'attenzione anche sulle condizioni iniziali del moto. Il problema viene presentato come segue: si ha un cannone posto nel punto (x_0, y_0) che forma con il suolo un angolo θ e che è in grado di lanciare un proiettile con velocità iniziale \vec{v} orientata come il cannone stesso. A questo punto è abbastanza facile fare vedere che questo scenario corrisponde a due moti, uno lungo l'asse x uniforme con velocità $v_{x_0} = |\vec{v}| \cos \theta$ e l'altro lungo l'asse y uniformemente accelerato con velocità iniziale pari a $v_{y_0} = |\vec{v}| \sin \theta$. Facendo fare i conti al foglio di calcolo si ottiene il grafico in **Figura 2.5**. Da questo grafico risulta evidente come la traiettoria sia una parabola. L'analisi può proseguire ad esempio dando poi la possibilità agli studenti di cambiare i parametri del moto, modificando la velocità iniziale e l'angolo del cannone in modo da modificare i valori di v_{x_0} e v_{y_0} , oppure modificando la posizione iniziale dello stesso. Un attività da proporre

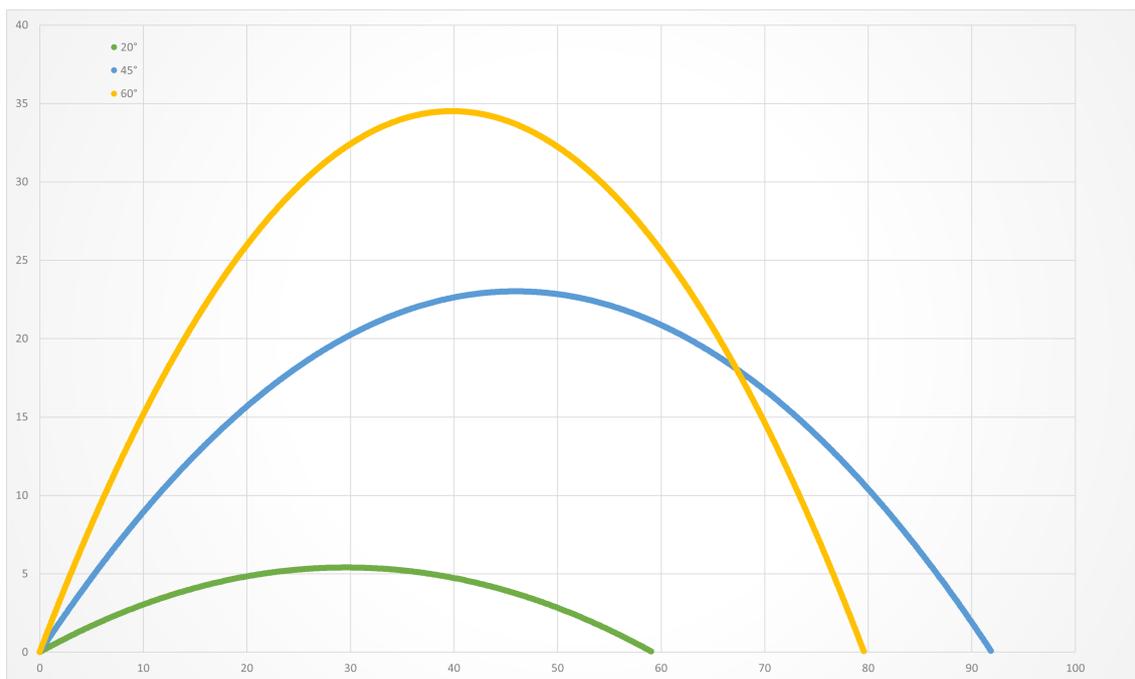


Figura 2.6: Traiettorie ottenute modificando la direzione della velocità iniziale per trovare la gittata massima

potrebbe essere quella di trovare l'angolo per il quale la gittata è massima, facendo calcolare al foglio le traiettorie di proiettili lanciati da tre cannoni posti nello stesso punto ma con angoli diversi, che porta a produrre grafici del tipo di quelli in **Figura 2.6**. La cosa interessante da far notare è come la gittata sia una funzione che ha un massimo per il valore $\theta = \frac{\pi}{4}$ e che non è una funzione monotona dell'angolo θ . Questo è solo uno dei possibili casi analizzabili e permettere agli studenti di sperimentare diverse condizioni iniziali li mette in condizione di avere un'esperienza diretta dei poteri predittivi di una teoria fisica.

Un concetto molto importante da trasmettere è che l'unica modifica che viene fatta è quella alle condizioni iniziali, da cui derivano poi moti diversi: il vantaggio dell'aver calcolato le traiettorie con il foglio di calcolo e con dei metodi ricorsivi è che è possibile osservare per gli studenti in maniera diretta come la modifica al punto di partenza dell'algoritmo modifichi poi tutti i successivi step e produca moti diversi. Questa è un'idea fondamentale che è possibile collegare poi a concetti più astratti o avanzati legati al calcolo differenziale e alla fisica in generale, come il teorema di esistenza ed unicità per le soluzioni delle equazioni differenziali. L'idea che per descrivere la dinamica di un sistema fisico abbiamo bisogno, oltre che di un modello matematico che ne esprima l'evoluzione, anche di conoscerne lo stato ad un qualche istante di tempo, è fondamentale. Questa idea discende in maniera naturale quando si considerino le leggi del moto come equazioni di ricorrenza, ma non risulta immediatamente ovvia dall'espressione delle leggi del moto nel continuo temporale; per questo motivo spesso non le viene data la giusta attenzione nei curriculum di fisica prima della formazione universitaria.

2.4 Pendoli

La teoria della gravitazione permette di investigare il moto del pendolo semplice: una massa sottoposta alla forza di gravità costante nelle vicinanze della superficie terrestre (la forza peso) e a forze vincolari, ad esempio esercitate da un'asta rigida di massa trascurabile, che limitano le possibili traiettorie del corpo a archi di circonferenza attorno al punto di sospensione. Il moto lungo la circonferenza avviene sotto l'effetto della componente tangenziale della forza peso, di forze di attrito sulla massa e/o sull'asta più eventuali "forzanti" che tendono a mantenere il moto evitando lo smorzamento dovuto agli attriti.

L'analisi sperimentale e teorica del moto del pendolo è riportata nei libri di testo di Fisica a qualunque livello scolastico. È utile fare alcune considerazioni sul metodo tradizionale di introdurre un argomento così importante da un punto di vista della Fisica fondamentale.

Generalmente, in laboratorio si osservano e misurano, utilizzando metro, cronometro e bilancia, le caratteristiche delle piccole oscillazioni del pendolo attorno alla posizione di equilibrio verticale. In questo modo si verifica l'isocronia delle piccole oscillazioni, la dipendenza del periodo di oscillazione dalla radice quadrata della lunghezza, la sua indipendenza dalla massa e la dipendenza dal valore locale dell'accelerazione di gravità.

Nelle lezioni teoriche si studia l'equazione del moto per piccole oscillazioni. La matematica utilizzata dipende dal livello delle conoscenze possedute dalla platea di studenti: nei primi corsi di Fisica si comincia con le proprietà cinematiche del moto armonico, definito come il moto seguito dalla proiezione sul diametro delle posizioni di un punto che percorre una circonferenza di moto circolare uniforme. Si mostra che in tale moto unidimensionale l'accelerazione è proporzionale e opposta allo spostamento dal punto di equilibrio, come richiesto dall'equazione della dinamica per piccole oscillazioni. Quando gli studenti hanno a disposizione i primi elementi di teoria delle funzioni si può ottenere lo stesso risultato facendo notare che le funzioni seno e coseno hanno derivate seconde opposte alle funzioni stesse e utilizzando questa caratteristica per risolvere l'equazione del moto per qualunque condizione iniziale. È nostra opinione che questa metodologia di presentazione dell'argomento sia criticabile da almeno tre punti di vista:

1. evita di indagare quale sia il modello di tempo nella meccanica newtoniana
2. nasconde il problema della definizione di unità di tempo
3. non accenna al problema delle oscillazioni in regime non lineare

Rispetto al primo punto si noti che per Newton (e per tutti i fisici dopo di lui fino agli inizi del '900):

Absolute, true, and mathematical time, of itself, and from its own nature, flows equably without relation to anything external, and by another name is called duration; relative, apparent, and common time, is some sensible and external (whether accurate or unequable) measure of duration by the means of motion which is commonly used instead of true time; such as an hour, a day, a month, a year.[4]

Il modello di tempo è quindi il continuo unidimensionale (la retta reale) percorso a velocità costante, valido per qualunque osservatore indipendentemente dal luogo in cui si trova e dal suo stato di moto. Newton asserisce che è irrilevante che esista un orologio che misuri il tempo vero (e in effetti nessun orologio può misurare un numero irrazionale di unità di misura). A questo scopo Newton deve formalizzare il concetto di limite e iniziare la costruzione del calcolo infinitesimale per dare un senso all'equazione della dinamica.

Per quanto riguarda il secondo punto è utile notare che utilizzare il cronometro per verificare l'isocronia delle oscillazioni costituisce un ragionamento circolare per chiunque pensi di misurare il tempo tramite le oscillazioni di un pendolo. Questo ragionamento circolare è preso a definizione in molti libri di testo che asseriscono che per misurare il tempo bisogna scegliere (non definire) un sistema periodico. Poiché il pendolo dalla metà del XVII secolo ha sostituito le definizioni di unità di tempo basata su eventi astronomici, dovevano esserci buone ragioni per definire le piccole oscillazioni del pendolo isocrone.

Le osservazioni guidate e le esperienze di laboratorio dovrebbero essere dedicate all'osservazione di molti pendoli e/o di altri sistemi oscillanti nelle vicinanze delle loro posizioni di equilibrio per verificare che i rapporti tra i loro periodi rimangano stabili nel tempo e che si conservino anche se i moti sono debolmente smorzati. In questo modo si potrebbero convincere gli studenti che stanno osservando un comportamento "universale" e che prendere il periodo di un particolare fenomeno oscillatorio come unità di misura è solo questione di convenienza, semplicità e stabilità del particolare fenomeno scelto. La classe dei fenomeni periodici, data questa definizione, conterrebbe comunque le piccole oscillazioni di moltissimi sistemi oscillanti (perché altrimenti non prendere l'intervallo di tempo tra due emissioni radioattive come definizione di unità di misura del tempo)

Dal punto di vista teorico, è fondamentale avere i mezzi per verificare che le leggi della dinamica

- prevedano l'isocronia delle piccole oscillazioni anche in presenza di smorzamento,
- prevedano uno scostamento calcolabile nel caso di oscillazioni di grande ampiezza,
- prevedano modalità forzanti che annullino l'effetto di smorzamento senza cambiare il periodo delle oscillazioni.

Questo è quello che si è provato a fare risolvendo le equazioni del moto in forma discretizzata, tenendo conto del termine non lineare nella forza gravitazionale ($\sin \theta$ invece che θ), considerando una forza di attrito fluido per tenere conto della resistenza dell'aria e una forza operante in tempi brevissimi quando la massa passa per la sua posizione più bassa per ripristinare l'energia cinetica persa per attrito a modello del funzionamento dello scappamento dell'orologio a pendolo.

Tradizionalmente nei curriculum scolastici il moto del pendolo viene affrontato iniziando da alcune considerazioni cinematiche fatte sul moto circolare uniforme, ovvero notando che il moto della proiezione sul diametro del punto che si muove lungo la circonferenza è un moto oscillatorio attorno al centro della circonferenza. Per

definizione tale moto viene definito moto armonico. Analizzando poi il moto armonico sempre da un punto di vista cinematico si fa notare che nel moto armonico spostamento ed accelerazione sono opposti ad ogni istante di tempo e valgono

$$x = \cos \omega \alpha$$

$$a = -\omega^2 \cos \alpha$$

Da questo viene dedotta l'equazione

$$a = -kx$$

che ha il supporto sperimentale della forza misurata per piccole elongazioni di una molla dalla sua posizione di equilibrio. Discutendo poi il moto del pendolo si fa vedere che effettivamente questo ha un comportamento analogo, con l'accelerazione che è sempre opposta allo spostamento dalla posizione di equilibrio, e quindi la sua legge del moto viene "incollata" su quella del moto armonico.

In contesti più avanzati si scrive la seconda legge della dinamica nella direzione tangente al cerchio su cui la massa è vincolata a muoversi quando è sottoposta alla sola forza di gravità. Le leggi del moto assumono allora la forma

$$l\ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

La risoluzione dell'equazione differenziale, non lineare per la presenza di $\sin \theta$, non è possibile in forma analitica chiusa e solitamente nei curriculum didattici viene presentata nella sua approssimazione lineare ($\sin \theta \sim \theta$). Con questa approssimazione l'equazione diventa

$$\ddot{\theta} = -g\theta$$

che è proprio quella del moto armonico e che è possibile risolvere analiticamente in maniera semplice. Le leggi della dinamica prevedono quindi che le piccole oscillazioni del pendolo siano ben descritte da un moto armonico ovvero, in particolare, che le oscillazioni siano isocrone. Nello specifico, per il pendolo descritto da questa equazione il periodo è pari a

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

e questo implica che tutti i pendoli di lunghezza l abbiano lo stesso periodo e che questo non cambi durante il moto. Difficilmente nei testi classici viene discusso qualitativamente e quantitativamente il regime non lineare, con l'unica eccezione di alcuni testi universitari (vedi ad esempio la Fisica di Berkeley [3])

L'approccio da noi proposto basato sulla discretizzazione delle equazioni del moto e sulla visualizzazione tramite strumenti informatici, il più semplice possibile, delle soluzioni delle equazioni del moto ha invece il grande vantaggio di essere più facilmente comprensibile anche da parte di studenti con minori conoscenze matematiche, inoltre rende possibile la visualizzazione del moto senza il bisogno di introdurre approssimazioni e permette anche di estendere facilmente il metodo al caso di pendolo smorzato o di pendolo forzato con scappamento in maniera intuitiva. L'equazione generale che descrive il moto di un pendolo con attrito e scappamento, ovvero un

modo di compensare lo smorzamento e mantenere il pendolo in oscillazione, può essere scritta come:

$$\ddot{\theta} = -\frac{\beta}{m}\dot{\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta + \mu e^{-10\theta^2}(1 + \operatorname{sgn}\dot{\theta})$$

Per discretizzarla e implementarla in un foglio di calcolo per la risoluzione partiamo dal definire il problema non in termini di derivate ma di velocità e accelerazione a tempi discreti; dividiamo l'intervallo di tempo $(0, T)$ in N intervalli di ampiezza $\tau = T/N$ in modo che l'istante di tempo t_i sia pari a $i\tau$ e definiamo θ_i , ω_i e α_i come i valori rispettivamente di angolo, velocità e accelerazione all'istante t_i . Le relazioni di ricorrenza per queste grandezze sono:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -\frac{\beta}{m}\omega_i - \frac{g}{l}\sin\theta_i + \mu e^{-10\theta_i^2}(1 + \operatorname{sgn}\omega_i) \\ \omega_i &= \omega_{i-1} + \alpha_{i-1}\tau \\ \theta_i &= \theta_{i-1} + \omega_{i-1}\tau\end{aligned}$$

Queste relazioni sono scritte in un foglio di calcolo, e una volta forniti i valori iniziali e i valori dei parametri β e μ , il calcolo viene svolto in maniera palese dal programma. Il grande vantaggio da un punto di vista didattico del foglio elettronico è che questo permette di vedere concretamente il processo di calcolo ad ogni passo a partire dai valori ottenuti allo passo precedente. Un altro grande vantaggio è che gli studenti sono messi in grado, semplicemente variando i valori dei parametri, di valutare in tempo reale i vari casi possibili e di visualizzare i moti risultanti. Come primo esempio vediamo il caso dell'isocronia delle piccole oscillazioni nel caso di pendolo ideale senza attrito; sul foglio di calcolo sono stati impostati tre moti, due di pendoli con ampiezze iniziali diverse ma piccole, e uno con un'ampiezza iniziale molto grande. Facendo poi produrre al foglio di calcolo un grafico per la posizione nel tempo dei tre pendoli (**Figura 2.7**) diventa subito chiara l'utilità di questo strumento. Considerando solo i grafici relativi ai pendoli con ampiezze iniziali piccole, agli studenti può essere fatto notare come le oscillazioni rimangano isocrone anche se di ampiezze diverse, e questo può essere preso come spunto per iniziare un discorso più generale sulla definizione di misura di tempo e sull'utilizzo di sistemi oscillanti. Infatti anche variando la lunghezza dei pendoli si potrebbe far vedere che il rapporto tra i numeri di oscillazioni in un dato intervallo di tempo rimane costante e far notare come questo sia alla base della definizione di periodicità e di intervallo di tempo. Prendendo poi in esame anche il terzo grafico il discorso si può spostare sulla dipendenza dalle condizioni iniziali e sulla validità dell'approssimazione di piccole oscillazioni nell'equazione, infatti risulta evidente come il pendolo con ampiezza iniziale pari a $\pi/2$ non abbia oscillazioni isocrone con gli altri due e che quindi la dipendenza del periodo dall'ampiezza iniziale diventa significativa per valori più grandi di θ_0 .

Passando poi a considerare anche i parametri β e μ il primo caso più semplice da far analizzare è quello del pendolo smorzato; anche qui conviene produrre dei grafici in cui viene considerato un primo pendolo ideale di confronto e un pendolo che invece sia sottoposto ad attrito (**Figura 2.8**). In questo caso quello che è facile fare osservare è che le oscillazioni, nonostante la loro ampiezza diminuisca gradualmente,

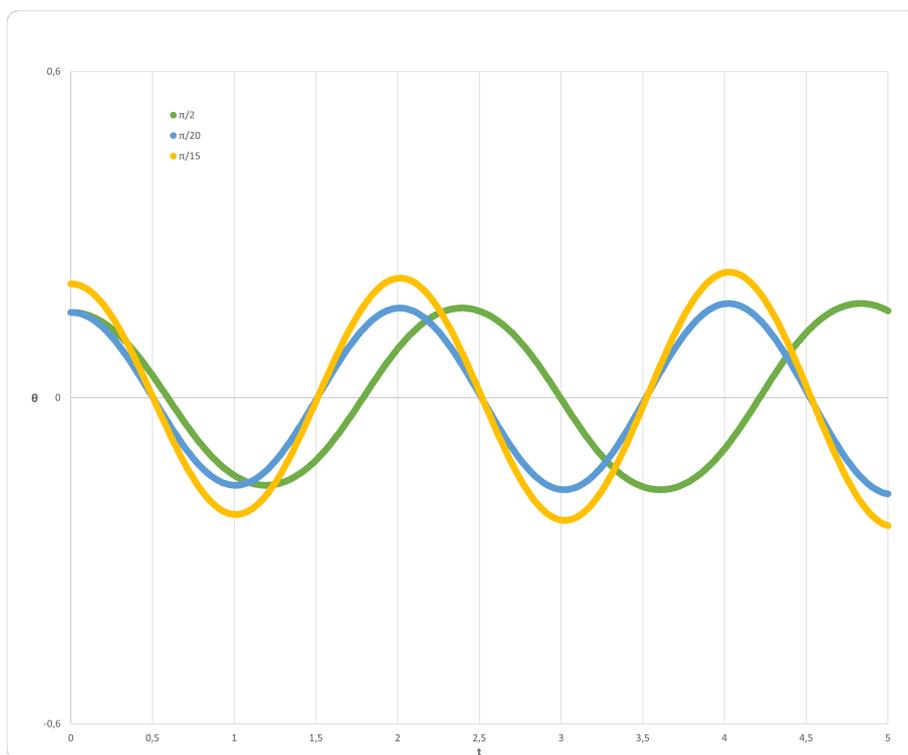


Figura 2.7: Moto di tre pendoli di pari lunghezza ma con ampiezza iniziale diversa: i due pendoli con ampiezza iniziale piccola rientrano nell'approssimazione di piccole oscillazioni e sono isocroni, il pendolo con ampiezza iniziale pari a $\frac{\pi}{2}$ non è invece isocrono in quanto il suo periodo risente delle condizioni iniziali (i valori di ampiezza delle oscillazioni del terzo pendolo sono stati riscalati di un fattore 10 per comodità).

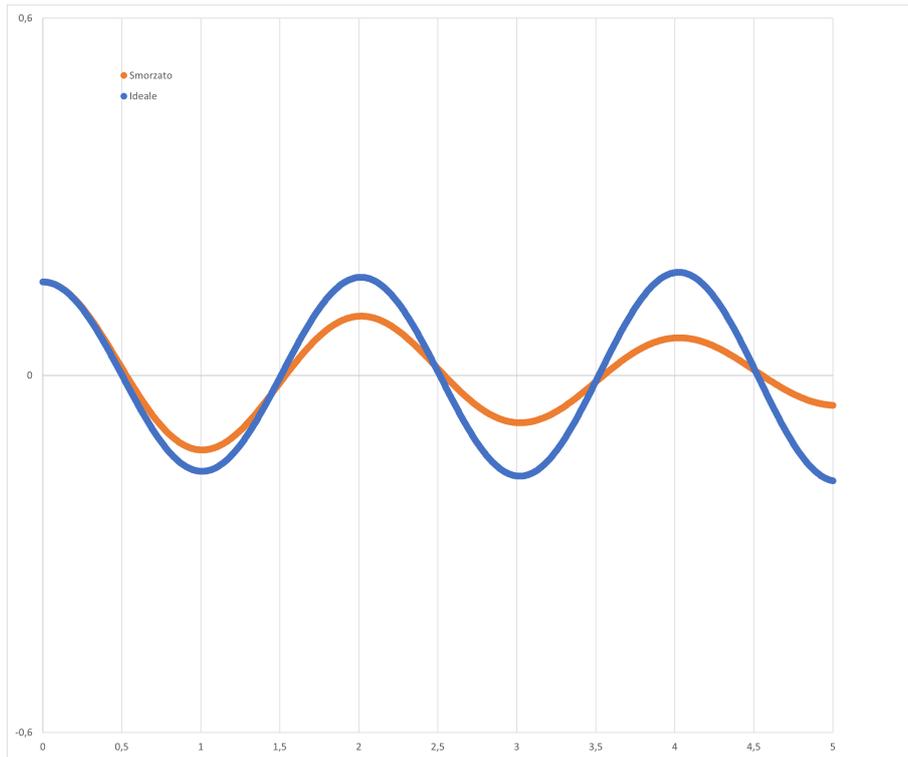


Figura 2.8: Confronto tra i periodi di oscillazione di un pendolo ideale e uno smorzato di pari lunghezza. Le oscillazioni restano isocrone fintanto che il moto del pendolo smorzato continua.

rimangono isocrone rispetto al pendolo ideale. Anche questo può essere preso come spunto per parlare del motivo per il quale vengono presi sistemi oscillanti come riferimenti per la misura del tempo, nello specifico facendo notare che il fatto che il periodo non dipenda dall'ampiezza dell'oscillazione rende il sistema molto affidabile per avere una misura consistente del tempo anche in condizioni non ideali. Facendo poi variare il parametro β (**Figura 2.9**) emerge un altro aspetto del fenomeno: all'aumentare del valore di β il numero di oscillazioni necessarie affinché il sistema si fermi del tutto diminuisce, fino ad arrivare a un punto in cui il sistema non oscilla più. Poiché i pendoli reali sono sottoposti ad attrito questo è un problema concreto che ne influenza il funzionamento, e che fino al XVII secolo ha reso l'utilizzo dei pendoli come orologi impossibile. Il modo di risolverlo è l'utilizzo di un dispositivo chiamato scappamento che consiste in un ingranaggio caricato a molla che da una leggera spinta al pendolo in certi punti del suo moto (è il responsabile del caratteristico "tic toc" che era tipico sentire nei vecchi orologi meccanici). Nella nostra equazione questo meccanismo viene modellizzato con il termine che moltiplica μ , e che corrisponde a una spinta data nel punto più basso della sua traiettoria, rappresentata dalla gaussiana, che però agisce solo quando il pendolo si muove da destra verso sinistra a causa del termine con $\text{sgn } \omega$. Ponendo quindi il parametro μ diverso da zero nel foglio di calcolo è possibile per gli studenti verificare che con la giusta combinazione di valori di β e μ è possibile produrre un sistema oscillante realistico che non si fermi e le cui oscillazioni restano isocrone, che è quello che concretamente si è fatto per secoli per misurare il tempo tramite la tecnologia degli orologi. Ad esempio ponendo $\beta = 1$ e $\mu = 0,35$ si ottiene il moto in **Figura 2.10**.

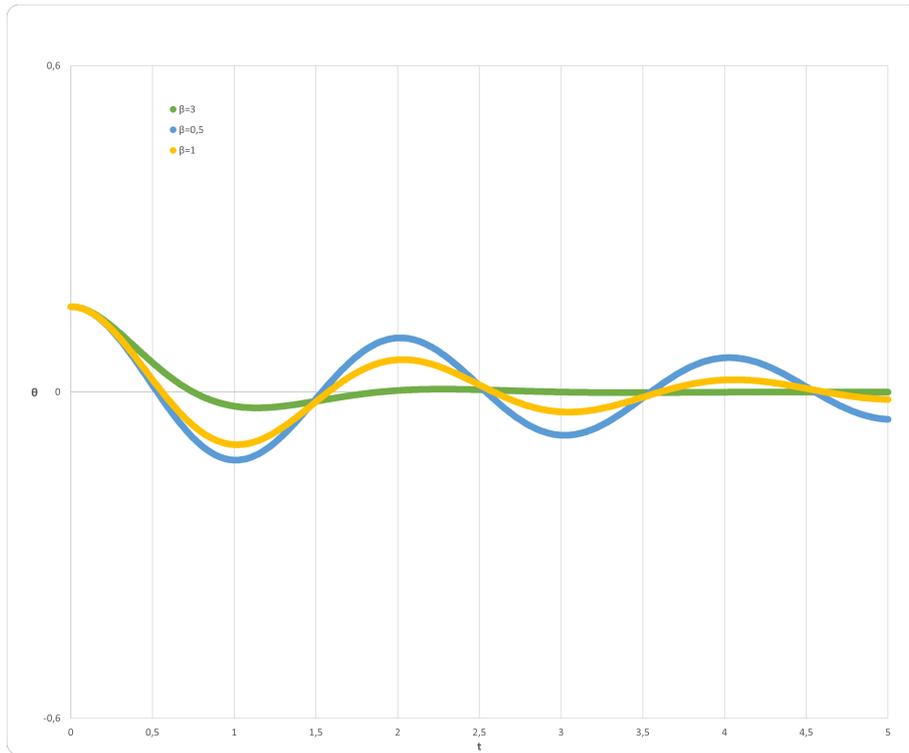


Figura 2.9: Lo smorzamento può modificare la natura del sistema. Oltre un certo valore di β il sistema non è più oscillante.

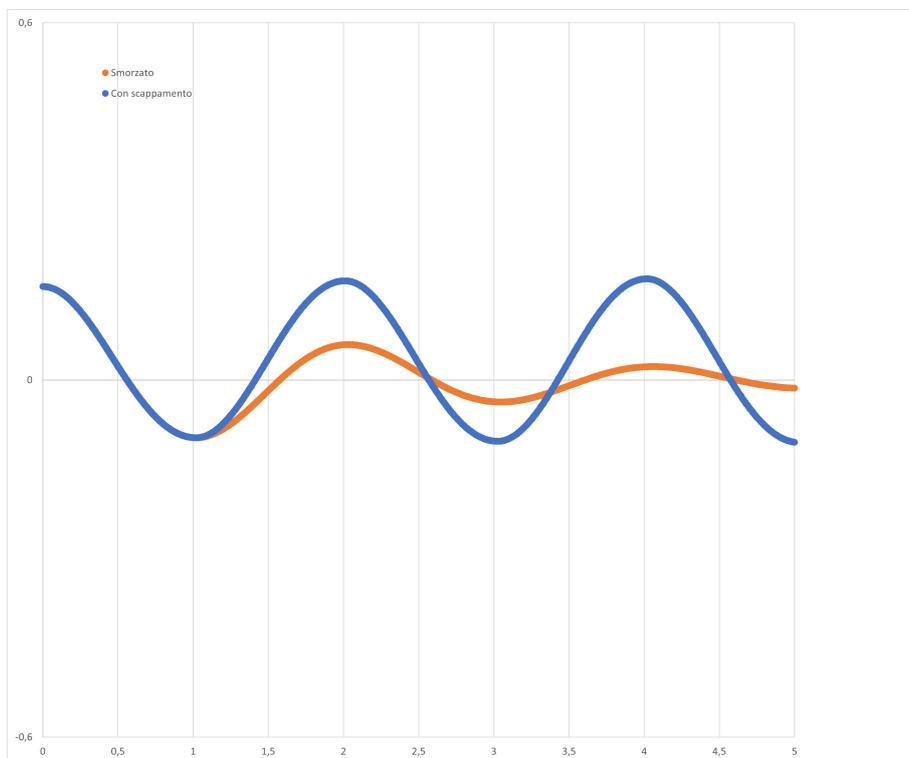


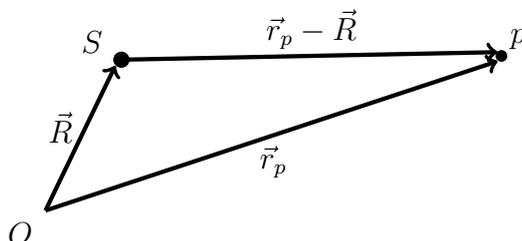
Figura 2.10: L'utilizzo di un meccanismo di scappamento permette di mantenere il sistema in moto mantenendo le oscillazioni isocrone.

Capitolo 3

Il problema a due corpi

Le equazioni della dinamica per i due corpi puntiformi p e S sono

$$\begin{aligned} m\vec{a}_p &= -G \frac{Mm}{|\vec{R} - \vec{r}_p|^3} (\vec{r}_p - \vec{R}) \\ M\vec{A} &= -G \frac{Mm}{|\vec{R} - \vec{r}_p|^3} (\vec{R} - \vec{r}_p) \end{aligned}$$



dove con M, \vec{R} e \vec{A} abbiamo indicato massa, posizione e accelerazione del “sole” e con m, \vec{r}_p e \vec{a}_p le stesse quantità relative al “pianeta”.

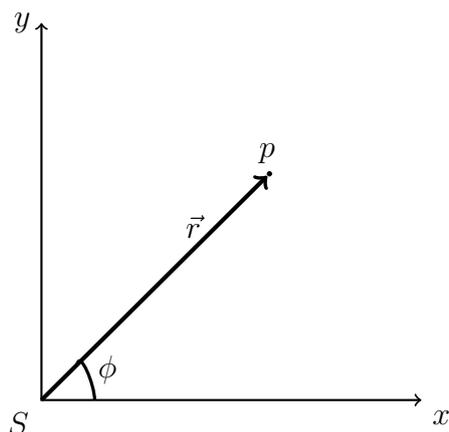
Moltiplicando la prima equazione per M , la seconda per m , sottraendo la seconda equazione dalla prima e dividendo per la somma delle due masse si ottiene

$$\mu(\vec{a}_p - \vec{A}) = -G \frac{Mm}{|\vec{R} - \vec{r}_p|^3} (\vec{r}_p - \vec{R})$$

con $\mu = \frac{Mm}{M+m} = \frac{m}{1+m/M}$ ($\sim m$ se $m/M \ll 1$).

Ponendo $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{R}$, posizione relativa del pianeta p rispetto al sole S , e $\vec{a} = \vec{a}_p - \vec{A}$ si ha

$$\mu\vec{a} = -G \frac{Mm}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \quad (3.1)$$



La coordinata relativa soddisfa dunque l'equazione della dinamica di un corpo puntiforme di massa μ attratto verso l'origine da un corpo di massa Mm/μ ($\sim M$ se $m/M \ll 1$).

Come abbiamo già visto, durante il moto si conservano il momento della quantità di moto rispetto ad S , che denoteremo con \vec{L} , e l'energia totale E

$$\frac{\vec{L}}{\mu} = \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{x}(0) \wedge \vec{v}(0) \quad (3.2)$$

$$E = \frac{1}{2}\mu|\vec{v}|^2 - G\frac{Mm}{|\vec{r}|} = \frac{1}{2}\mu|\vec{v}(0)|^2 - G\frac{Mm}{|\vec{r}(0)|} \quad (3.3)$$

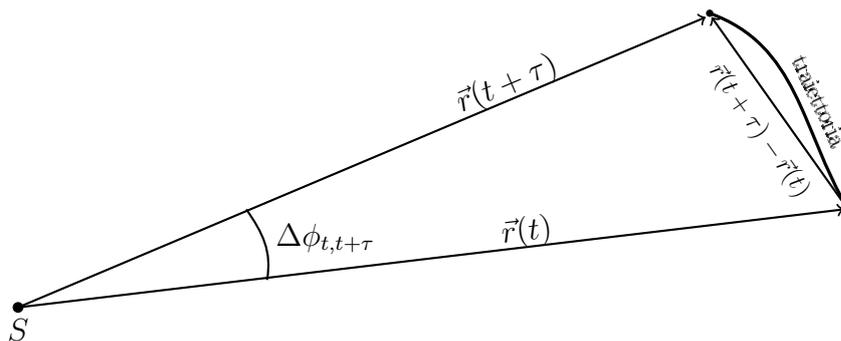
dove \vec{v} indica il vettore velocità relativa del pianeta rispetto al sole ($\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$). Vi sono alcune conseguenze immediate delle (3.2) e (3.3) che ricordiamo qui di seguito:

- Il piano dell'orbita rimane ad ogni istante quello individuato da $\vec{x}(0)$ e da $\vec{v}(0)$.
- La velocità areolare è costante: l'area $A_{0,t}$ della parte del piano dell'orbita contenuta tra $\vec{x}(0)$, la parte di traiettoria percorsa tra il tempo 0 e il tempo t e $\vec{x}(t)$ incrementa con velocità costante.

Prima di provare questo risultato, si noti che il vettore \vec{L} è perpendicolare al piano dell'orbita e oltre che in modulo e direzione rimane costante in verso. Se il moto è osservato dalla parte del suo verso positivo il raggio vettore $\vec{r}(t)$ non può ruotare che in senso antiorario; supporremo sempre di osservare il moto da questa parte del piano. Se il moto è descritto tramite coordinate polari $|\vec{r}|$ (che da ora in poi indicheremo con r) e ϕ , questo significa che ϕ non può che crescere al passare del tempo, cioè che si ha sempre $\frac{d\phi}{dt} \geq 0$.

Dalla figura si vede che:

$$A_{t,t+\tau} \sim \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \wedge \vec{r}(t+\tau)| \sim \frac{1}{2} r(t)^2 \Delta\phi_{t,t+\tau}$$



dove

- $A_{t,t+\tau}$ è l'area compresa tra i vettori posizione ai tempi t e $t + \tau$ e la traiettoria del pianeta tra gli stessi tempi;
- il secondo membro è l'area del triangolo compreso tra i vettori posizione, agli stessi due tempi, e la loro differenza;
- il terzo membro è l'area del settore circolare di raggio $r(t)$ e di ampiezza angolare pari all'incremento dell'angolo tra i tempi t e $t + \tau$.

Le tre aree differiscono per termini piccoli per τ piccolo (questo è il significato dei "circa" nella relazione precedente). Dividendo per τ , nel limite in cui τ tende a 0 si ricava

$$\Xi = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\dot{\vec{r}}(t) \wedge \vec{v}(t)| = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{cost}$$

- Se $E < 0$ l'orbita rimane in una regione limitata.

Infatti: l'Energia Cinetica = $E + G \frac{mM}{|r|} \geq 0$ da cui

$$G \frac{mM}{r} \geq -E \quad \text{ovvero} \quad r \leq G \frac{mM}{|E|}$$

3.1 Equazione della traiettoria

Il calcolo dell'equazione della traiettoria verrà riportato ancora una volta utilizzando due strategie potenzialmente adatte a due platee differenti di studenti. In rosso, è riportata la trattazione analitica. Si noti che il calcolo non richiede più della conoscenza delle derivate delle funzioni seno e coseno. Viene utilizzato infatti il metodo dell'**odografa** che semplifica notevolmente il calcolo analitico. L'odografa introdotta da Hamilton [2] per caratterizzare le traiettorie di corpi sottoposti a forze centrali è tornata ciclicamente popolare nelle analisi del moto sotto varie forme. Per quanto riguarda il suo utilizzo nella teoria dei moti planetari la trattazione si può trovare nel volume dedicato alla Meccanica della Fisica Teorica di Sommerfeld [8] e, in forma molto semplice nel libro di Polya sui metodi matematici nella scienza [5]. In blue è riportata una trattazione puramente geometrica proposta da Feynman che si rifà in parte al metodo dell'odografa. **Vogliamo mostrare come primo risultato il seguente:**

grafico delle velocità: se da S si tracciano i vettori velocità di p si ottiene un cerchio di raggio $G Mm/L$

Infatti

$$\begin{aligned} a_x = \frac{dv_x}{dt} &= -G \frac{mM}{\mu r^2} \cos \phi \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} &= -G \frac{mM}{\mu r^2} \sin \phi \end{aligned} \quad (3.4)$$

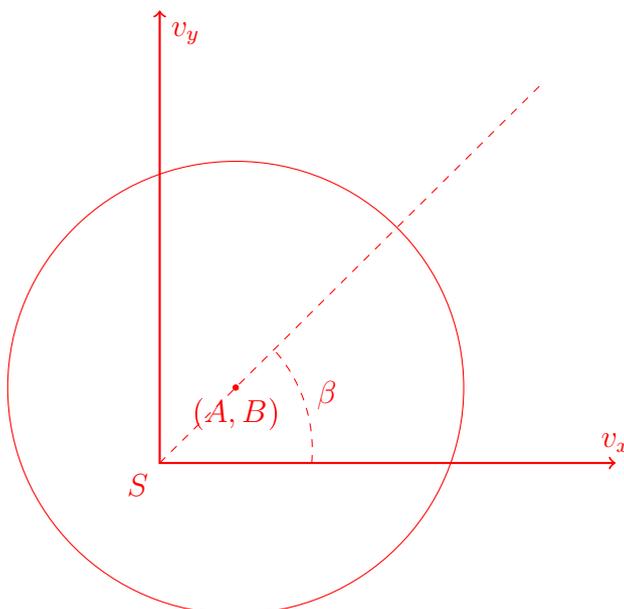
dalla formula per la velocità areolare

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{d\phi} = \frac{\frac{dv_x}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}} &= -G \frac{mM}{2\mu\Xi} \cos \phi = -G \frac{mM}{L} \cos \phi \\ \frac{dv_y}{d\phi} = \frac{\frac{dv_y}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}} &= -G \frac{mM}{2\mu\Xi} \sin \phi = -G \frac{mM}{L} \sin \phi \end{aligned} \quad (3.5)$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} v_x &= -G \frac{mM}{L} \sin \phi + A \\ v_y &= G \frac{mM}{L} \cos \phi + B \end{aligned} \quad (3.6)$$

Con A e B costanti che risultano fissate dalla conoscenza della velocità iniziale (e dalla direzione e verso arbitrari scelti per l'asse x). In particolare $A = v_x$ quando $\phi = 0$ e $B = v_y$ quando $\phi = \pi/2$. Questa è proprio la forma parametrica di una circonferenza di centro (A, B) e raggio $G \frac{mM}{L}$. Ruotando l'asse polare (l'asse parallelo a v_y da cui si cominciano a contare gli angoli) è possibile porre una delle costanti di integrazione uguale a 0.



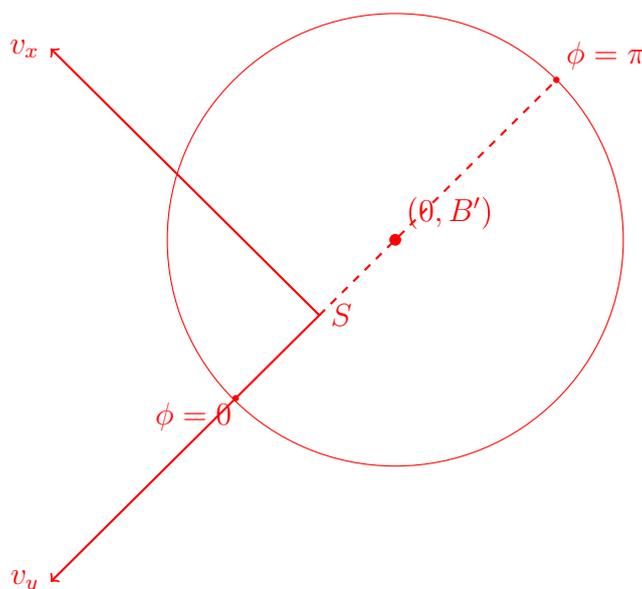
Per convincercene supponiamo inizialmente di essere nella condizione indicata in figura, cioè che S si trovi dentro il cerchio delle velocità ($A^2 + B^2 < \left(\frac{GMm}{L}\right)$).

Si può notare che con una rotazione degli assi di $\pi/2 - \beta$ in senso orario, oppure con una rotazione di $\pi/2 + \beta$ in senso antiorario, si può portare l'asse v_y a passare per il centro (A, B) . Nel primo caso $\phi = 0$ corrisponderebbe al punto di velocità massima (e quindi di distanza minima da S , "perielio") e al punto di velocità minima (e quindi di distanza massima da S , "afelio"). Nel secondo caso i punti di perielio e afelio corrisponderebbero rispettivamente a $\phi = \pi$ e a $\phi = 0$.

Supponendo di aver fatto la seconda scelta, le equazioni diventano:

$$\begin{aligned} v_x &= -G \frac{mM}{L} \sin \phi \\ v_y &= G \frac{mM}{L} \cos \phi + B' \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove risulterà $B' < 0$ come si deduce dalla figura.



La forma della traiettoria di p si deduce facilmente dal risultato precedente. Scrivendo, in termini delle coordinate cartesiane, l'eguaglianza $\vec{L}/\mu = \vec{r} \wedge \vec{v}$ ovvero $xv_y - yv_x = L/\mu$ si ottiene

$$rG \frac{mM}{L} \cos^2 \phi + B' r \cos \phi + rG \frac{mM}{L} \sin^2 \phi = \frac{L}{\mu}$$

Cioè

$$r = \frac{l}{1 - e \cos \phi} \quad (3.8)$$

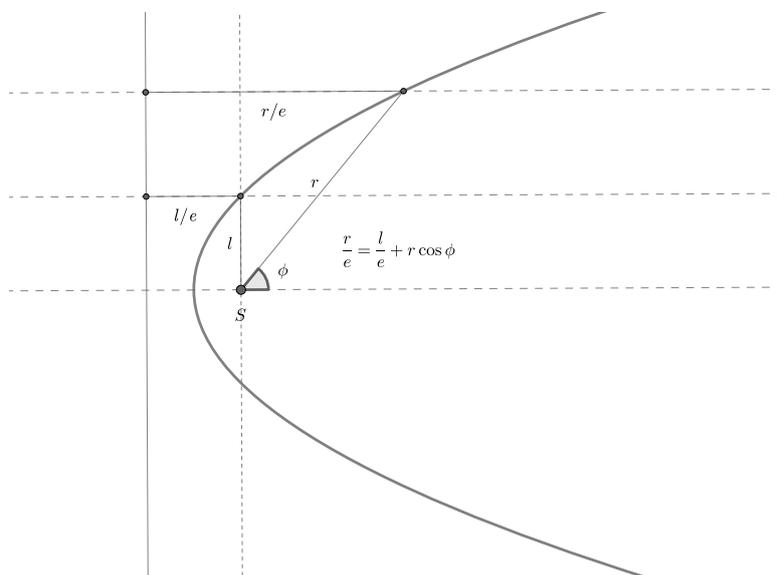
Con $l = L^2/GMm\mu$ e $e = -B'L/GMm$ (< 1 se S è interno al cerchio delle velocità). È facile controllare che si ottiene la stessa equazione nei casi in cui S si trovi sul perimetro del cerchio o esterno ad esso; il corrispondente valore di e risulterebbe

rispettivamente uguale o maggiore di 1.

L'equazione (3.8) con $e < 1$ descrive un'ellisse con un fuoco nell'origine ed eccentricità (rapporto tra distanza tra i fuochi e asse maggiore) pari a e . In effetti è possibile provare la seguente caratterizzazione delle coniche: una conica è il luogo geometrico dei punti di un piano le cui distanze da un punto detto fuoco e da una retta detta direttrice hanno un rapporto pari a e .

La conica sarà un'ellisse, una parabola o un'iperbole a seconda che e sia rispettivamente minore, uguale o maggiore di 1.

Da tale caratterizzazione discende (vedi figura) che, rispetto ad un sistema di coordinate polari con origine nel fuoco e asse polare perpendicolare alla direttrice (nel verso che si allontana da essa), l'equazione di una conica è sempre del tipo (3.8) con l uguale alla distanza dal fuoco del punto corrispondente a $\phi = \pi/2$.



Per chi avesse maggior familiarità con la caratterizzazione delle coniche scritta in termini di equazioni per le coordinate cartesiane notiamo che con la sostituzione $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos \phi = x/r$ la (3.8) diventa

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2lex = l^2$$

cioè della forma

$$\frac{(x - \frac{le}{1-e^2})^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$$

(con a rapidamente calcolabile).

La traiettoria è quindi un'ellisse ed è facile convincersi che ha S come fuoco.

Per concludere il calcolo, B' dovrà essere espresso in termini delle condizioni iniziali ovvero delle costanti del moto. Sostituendo nella formula dell'energia i valori di velocità e posizione calcolati per $\phi = \pi/2$ si ricava

$$\frac{\mu}{2} \left[\left(G \frac{mM}{L} \right)^2 + (B')^2 \right] = G \frac{mM}{l} + E$$

da cui, sostituendo il valore di l , si ha

$$\left(G \frac{mM}{L}\right)^2 + \frac{2E}{\mu} = B^2$$

e quindi

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu(GmM)^2}}$$

La traiettoria è quindi ellittica se e solo se l'energia E risulta minore di zero. In questo caso il moto risulta periodico e possiamo facilmente calcolare il periodo di rivoluzione dividendo l'area totale dell'ellisse per la velocità areolare costante con la quale l'orbita viene percorsa

$$T = \frac{\pi ab}{L/2\mu} = \frac{\pi(1 - e^2)^{1/2}a^2}{L/2\mu}$$

dove a e b sono rispettivamente gli assi maggiore e minore dell'ellisse. La distanza tra l'afelio ed il perielio (pari a $2a$) può essere calcolata sommando le distanze da S dell'afelio e del perielio, cioè dei due punti che nell'equazione della traiettoria in coordinate polari corrispondono rispettivamente ai valori $\phi = 0$ e $\phi = \pi$

$$2a = \frac{L^2}{GmM\mu} \left(\frac{1}{1 - e} + \frac{1}{1 + e} \right)$$

eliminando L dalle due espressioni per T e per a si trova finalmente

$$T = \frac{2\pi}{GM^{1/2}} \left(\frac{\mu}{m} \right)^{1/2} a^{3/2}$$

che prova la terza legge di Keplero.

Si noti che la costante di proporzionalità tra quadrato dei tempi di rivoluzione e cubo del semiasse maggiore dipende debolmente dalla massa del pianeta attraverso il fattore $\frac{\mu}{m}$, che risulta comunque molto vicino a 1 se la massa del sole è molto più grande della massa dei pianeti

3.1.1 I Diagrammi di Feynman

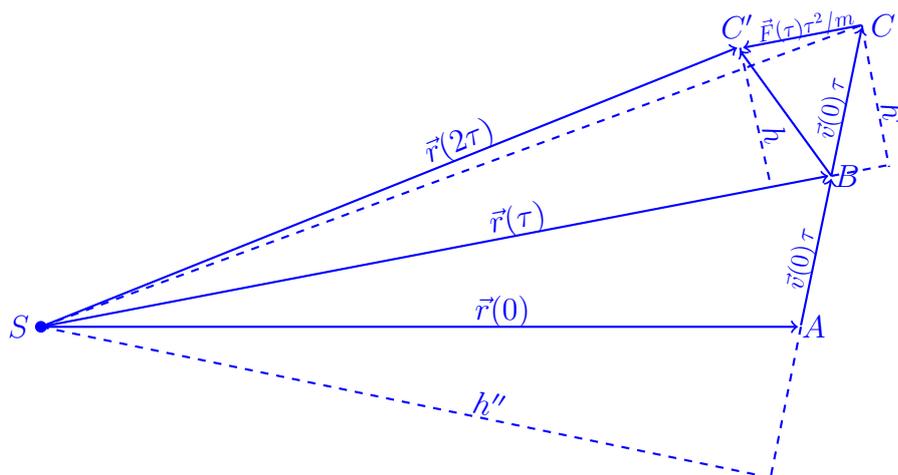
Come abbiamo visto, Newton costruì le sue dimostrazioni sul problema delle orbite attraverso diagrammi costruiti come segue: dalla posizione iniziale si opera uno spostamento pari alla velocità iniziale moltiplicata per un intervallo di tempo piccolo preassegnato τ , come se il corpo fosse avanzato in quell'intervallo con velocità costante. Si calcola poi l'impulso della forza di attrazione gravitazionale nello stesso periodo approssimandolo con il prodotto della forza all'istante finale per τ . La velocità nel periodo successivo viene presa pari a quella precedente più il rapporto tra l'impulso e la massa del punto e così via. Il limite geometrico, per τ piccolo, della spezzata così costruita sarà la traiettoria del corpo puntiforme.

Di seguito rileggiamo i risultati, ottenuti precedentemente tramite calcolo analitico, in termini di questa metodologia di calcolo.

• **Costanza della velocità areolare**

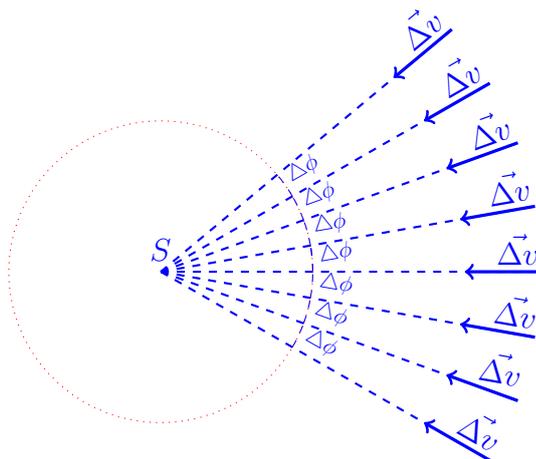
Lo spostamento BC' nel secondo intervallo è la somma dello spostamento BC che il punto avrebbe se continuasse con velocità $\vec{v}(0)$ più lo spostamento $\Delta\vec{v} \tau$, dove la variazione di velocità è approssimata con $\frac{\vec{F}}{m} \tau$ in cui \vec{F} è presa all'istante τ ed è quindi diretta da B verso S .

Essendo CC' parallelo a BS , h ed h' , perpendicolari a SB , hanno la stessa lunghezza e le aree dei triangoli $SC'B$ e SCB , con base comune SB e uguali altezze, sono uguali. Del resto i triangoli SAB e SBC hanno la stessa area essendo le due basi AB e BC uguali e l'altezza h'' comune. L'area spazzata nel primo τ è quindi uguale a quella spazzata nel successivo. Si noti che il risultato è valido qualunque sia CC' , parallelo a BS , quindi qualunque sia la forza \vec{F} purché sia centrale.

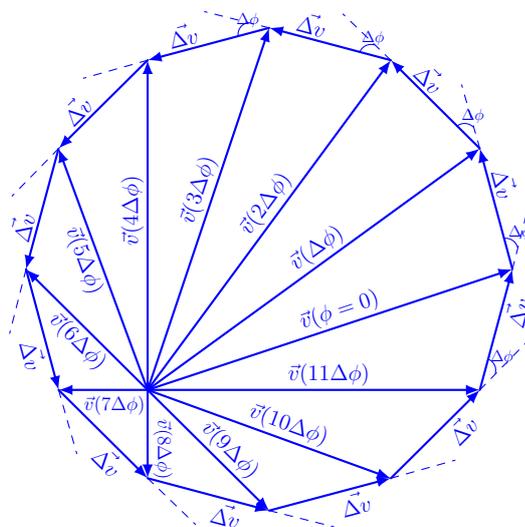


- **Il grafico delle velocità (odografa) è un cerchio** Preso come origine il centro attrattore S dividiamo il piano dell'orbita in settori di angolo $\Delta\phi = \frac{2\pi}{N}$ per N molto grande e analizziamo la traiettoria quando passa da una retta limite di un settore a quella successiva.

Le variazioni di velocità quando l'angolo incrementa di $\Delta\phi$ sono tutte uguali e dirette radialmente: infatti la variazione di velocità è proporzionale all'impulso $\vec{F}\Delta t$, dove Δt è il tempo che il punto impiega perché l'angolo incrementi di $\Delta\phi$. Poiché la velocità areolare è costante, tale intervallo di tempo è proporzionale al quadrato della distanza; essendo la forza proporzionale all'inverso del quadrato della distanza l'impulso è costante in ciascun settore.



Come si vede dalla figura, l'aggiunta ad una qualunque velocità iniziale di vettori di modulo costante, ruotati ciascuno rispetto al precedente di un angolo costante $\Delta\phi = 2\pi/N$, chiude un poligono regolare di N lati. Quando il numero N di divisioni dell'angolo giro di ampiezza 2π diventa grande, il poligono così costruito tende a un cerchio, riproducendo, in termini geometrici, la dimostrazione analitica fatta precedentemente.



In una lezione, diventata recentemente un libro [1], Richard Feynman procede da questo risultato a provare l'ellitticità delle orbite con una costruzione puramente geometrica che non richiede alcuna conoscenza di calcolo infinitesimale. Il calcolo della traiettoria fatto da Feynman utilizza ragionamenti puramente geometrici e una caratterizzazione dell'ellissi non standard. Non sarà riportato qui in quanto si allontana dalle nostre metodologie di calcolo delle soluzioni del problema a due corpi

3.1.2 Il calcolo delle traiettorie con il metodo discretizzato

Utilizzando il metodo dell'odografa il calcolo discretizzato diventa estremamente semplice: le equazioni da iterare sono

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + v_{x_{i-1}} \tau & v_{x_i} &= -\frac{y_i}{R_i} \\ y_i &= y_{i-1} + v_{y_{i-1}} \tau & v_{y_i} &= \frac{x_i}{R_i} + B \end{aligned}$$

dove $R_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$. Per comodità è stata posta pari a uno la quantità $G \frac{mM}{L}$. Questa forma delle equazioni corrisponde a delle condizioni iniziali con il corpo posto nel perielio e quindi con velocità ortogonale a R e con componente solo lungo y pari a $B + 1$. La scelta del valore di B determina il tipo di traiettoria che si ottiene: per $B = 0$ è una circonferenza, per $B < 1$ un'ellisse, per $B = 1$ una parabola ed infine per $B > 1$ un'iperbole. Facendo produrre al foglio di calcolo il grafico della traiettoria si ottiene il risultato mostrato in **Figura 3.1**.

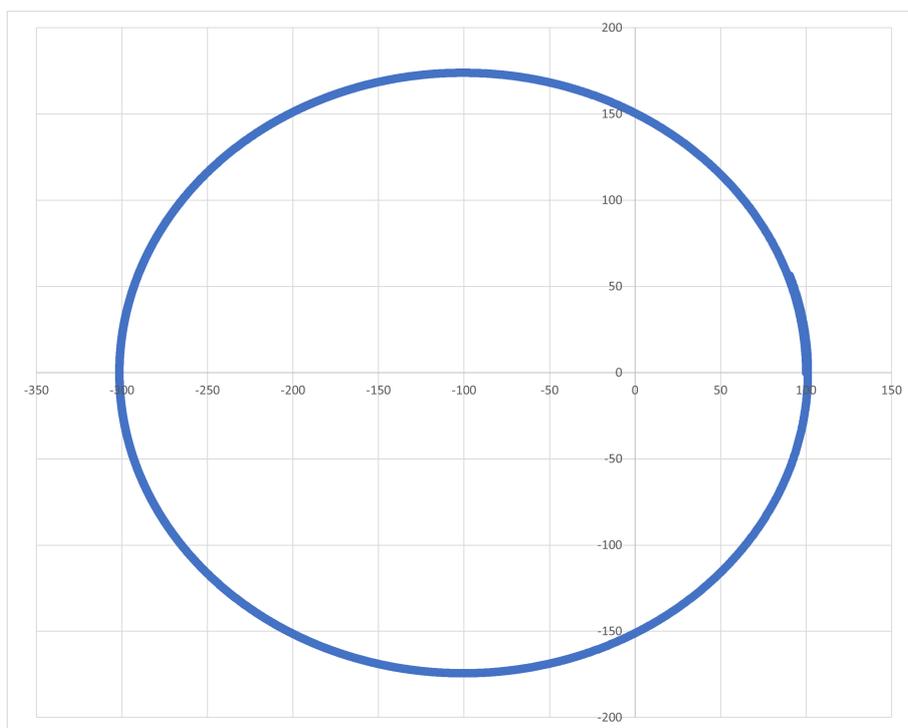


Figura 3.1: Traiettoria ricavata per ricorrenza con il parametro B pari a 0,5.

Può essere istruttivo mostrare come, cambiando il valore del parametro B che è legato alla posizione iniziale e all'energia cinetica del corpo, si possano ottenere anche traiettorie non chiuse. Un esempio è riportato in **Figura 3.2**.

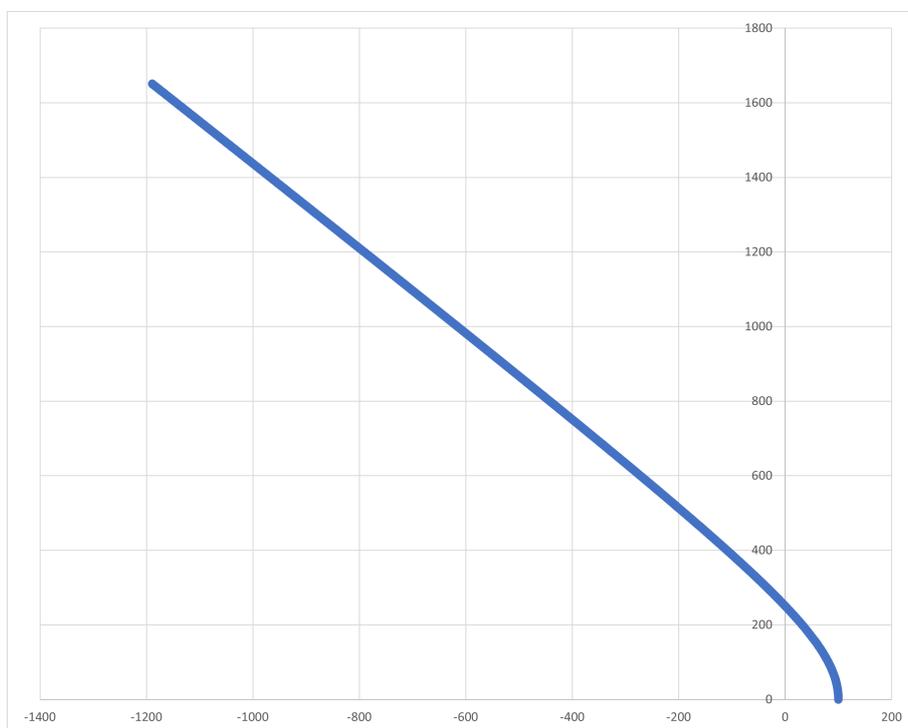


Figura 3.2: Traiettoria ricavata per ricorrenza con il parametro B pari a 1, 5.

Software a oggetti

Un altro approccio didattico al problema è l'utilizzo di software a oggetti che permettano di simulare l'evoluzione del sistema a due corpi nelle condizioni più varie. Questo tipo di programma ha il vantaggio di mostrare in maniera più intuitiva l'evoluzione del sistema, ma non ha la stessa trasparenza del foglio di calcolo; è importante quindi far capire agli studenti che, anche se con metodi più sofisticati, il software a oggetti utilizza dei protocolli di calcolo del tutto analoghi come approccio a quelli visti sul foglio di calcolo. Un fenomeno interessante da far osservare è come variando la velocità iniziale del corpo si possano riprodurre alcuni dei moti visti fino ad ora (**Figure 3.3, 3.4 e 3.5**). Per ovvie ragioni qui saranno riportati solo i diagrammi delle traiettorie ottenute, ma si tenga presente che il software riproduce in tempo reale il moto. Per chi fosse interessato è possibile visualizzare i filmati al link :

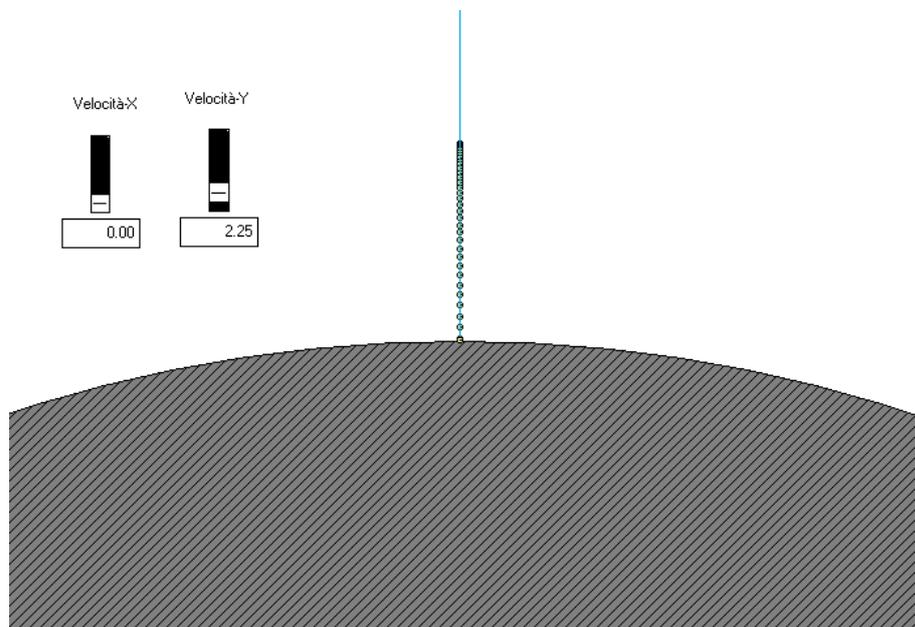


Figura 3.3: Moto in caduta libera con velocità iniziale nulla.

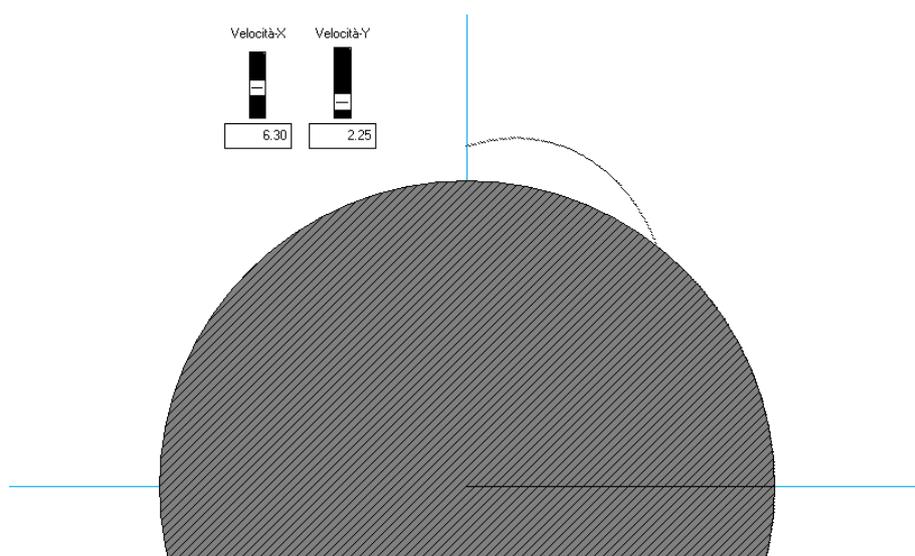


Figura 3.4: Moto di un grave con velocità iniziale maggiore di zero.

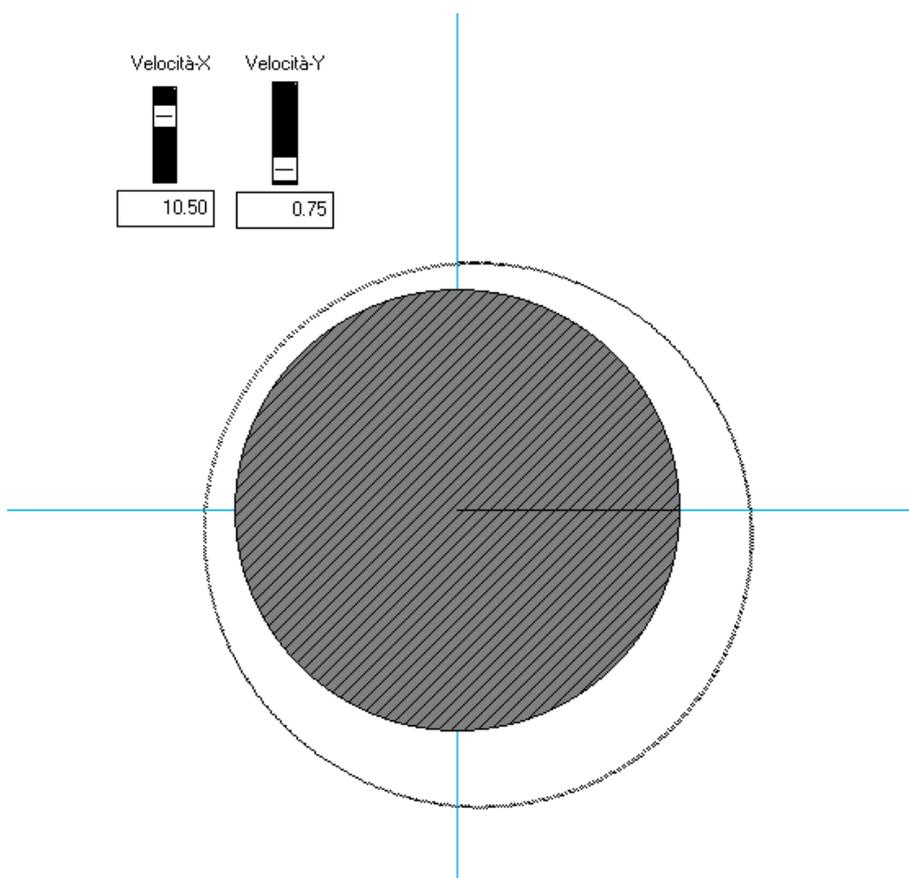


Figura 3.5: Moto orbitale ottenuto con una velocità iniziale maggiore del valore di soglia.

Capitolo 4

Il problema a tre corpi e la stabilità del sistema solare

La meccanica newtoniana costituì per tutto il secolo successivo alla sua formulazione uno strumento fondamentale di indagine razionale della realtà fisica e un emblema di rigore e di precisione previsionale. Si rivelò infatti un quadro esplicativo potentissimo di molti fenomeni ancora incompresi. L'efficacia della teoria spinse a assumere il metodo scientifico come unico mezzo per la ricerca della verità, contro ogni imposizione di norme e conoscenze non dettate dalla ragione. Per analogia con la scoperta delle leggi del moto, si assunse la possibilità di formulare, in ogni ambito di ricerca, leggi che permettessero di prevedere deterministicamente l'evoluzione di qualunque sistema in un futuro comunque lontano.

È a nostro parere necessario che gli studenti abbiano la possibilità di comprendere un paradigma scientifico che tanta importanza ha avuto nello sviluppo della Fisica. La matematica della “Meccanica Celeste” è però, da sempre, considerata al di fuori della portata anche di studenti universitari degli ultimi anni di corso. Per ovviare a questa difficoltà, la nostra proposta intende sfruttare la presentazione a tempi discreti delle leggi di evoluzione per corpi in interazione gravitazionale unita ai metodi elementari di soluzioni delle equazioni di ricorrenza introdotti nei capitoli precedenti.

È interessante preliminarmente approfondire lo sviluppo storico dello studio della dinamica avvenuto nel '700, per chiarire che il trionfo della teoria non è solo dovuto alla soluzione del problema a due corpi da parte di Newton. Il problema a due corpi considera un sistema isolato formato dal Sole e da un pianeta. Newton, partendo dalle accelerazioni ricavate dalla seconda e dalla terza legge di Keplero, ipotizza la forza di gravitazione e dimostra la validità della legge delle orbite (la prima legge di Keplero).

L'ipotesi di gravitazione “universale” assume però che anche i pianeti si attraggano tra di loro e che, di conseguenza, le loro orbite non risulteranno ellissi kepleriane.

Di seguito, proverò a dare una lista (forse troppo) sintetica dei risultati della teoria a molti corpi elaborati nel secolo successivo alla morte di Newton, validati successivamente da osservazioni astronomiche :

- Eulero e Lagrange, studiando problemi a tre corpi, scoprirono l'esistenza di punti di equilibrio (punti lagrangiani) in cui altri corpi avrebbero potuto ri-

manere in quiete rispetto ai pianeti stessi. Un secolo e mezzo dopo gli asteroidi “Troiani” furono osservati in un punto lagrangiano del sistema Sole-Giove. Attualmente si conoscono molti sistemi di asteroidi con le stesse caratteristiche.

- La teoria delle perturbazioni permise di calcolare con grande esattezza le variazioni dell’orbita dei pianeti dovute alla presenza di altri pianeti o dei loro satelliti. Malgrado si tenesse conto delle perturbazioni indotte da Giove e Saturno, l’orbita di Urano presentava ulteriori anomalie. Poco più di un secolo dopo la morte di Newton, Adams e Le Verrier, convinti che le anomalie dipendessero dalla presenza di un pianeta, mai osservato, esterno a Urano, ne calcolarono la posizione risolvendo un difficile “problema inverso” per corpi in interazione gravitazionale. Il pianeta, Nettuno, fu osservato a meno di un grado dalla posizione calcolata.
- Più recentemente, investigando (sia analiticamente che con calcolo numerico) la stabilità del sistema solare, si è evidenziato che il sistema solare è un sistema caotico: piccole differenze di condizioni iniziali possono portare ad evoluzioni significativamente diverse (situazione analoga al popolare “effetto farfalla” per l’evoluzione dell’atmosfera).

In sintesi, la possibilità di calcolare con un altissimo grado di precisione le traiettorie di tre o più corpi in interazione gravitazionale dimostra le grandi potenzialità della teoria della gravitazione universale e permette di introdurre nuovi paradigmi teorici, molto popolari in numerose presentazioni divulgative che li propongono spesso in maniera confusa e confondente.

4.1 Foglio di calcolo

Riprendendo l’ipotesi di lavoro introdotta precedentemente, abbiamo affrontato il problema del calcolo delle traiettorie per scopi didattici utilizzando l’introduzione discretizzata alle equazioni del moto. Naturalmente ci si è limitati a alcuni casi semplici del moto di più corpi, che mostrano però evoluzioni non banali,

A questo scopo, proponiamo preliminarmente, come nei capitoli precedenti, l’utilizzazione del foglio elettronico per risolvere il problema a tre corpi ridotto. Il sole è considerato fisso nell’origine degli assi e il pianeta esterno si muove in un’orbita kepleriana assegnata. Il pianetino interno di massa molto inferiore a quella del pianeta esterno, si muove sottoposto alla forza gravitazionale del sole e del pianeta.

Considerando l’orbita del pianeta esterno circolare per semplicità si ottengono le seguenti equazioni discretizzate per il moto del pianeta interno:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + v_{x_i} \tau & v_{x_i} &= v_{x_{i-1}} + (-A_{x_{i-1}} + a_{x_{i-1}}) \tau \\ y_i &= y_{i-1} + v_{y_i} \tau & v_{y_i} &= v_{y_{i-1}} + (-A_{y_{i-1}} + a_{y_{i-1}}) \tau \end{aligned}$$

Dove \vec{A} e \vec{a} rappresentano le accelerazioni dovute rispettivamente al sole fisso nell'origine e al pianeta esterno. Esplicitando esse valgono a ogni passo

$$A_{x_i} = \frac{GMx_i}{(x_i^2 + y_i^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$A_{y_i} = \frac{GM y_i}{(x_i^2 + y_i^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$a_{x_i} = \frac{Gm_e x_i}{(x_i^2 + y_i^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$a_{y_i} = \frac{Gm_e y_i}{(x_i^2 + y_i^2)^{\frac{3}{2}}}$$

A seconda di quanto vale il rapporto $\frac{M}{m_e}$ si possono osservare moti di vario tipo. Ad esempio prendendo il pianeta esterno con una massa molto minore rispetto al sole, si ottengono orbite ellittiche quasi imperturbate come si vede in **Figura 4.1**.

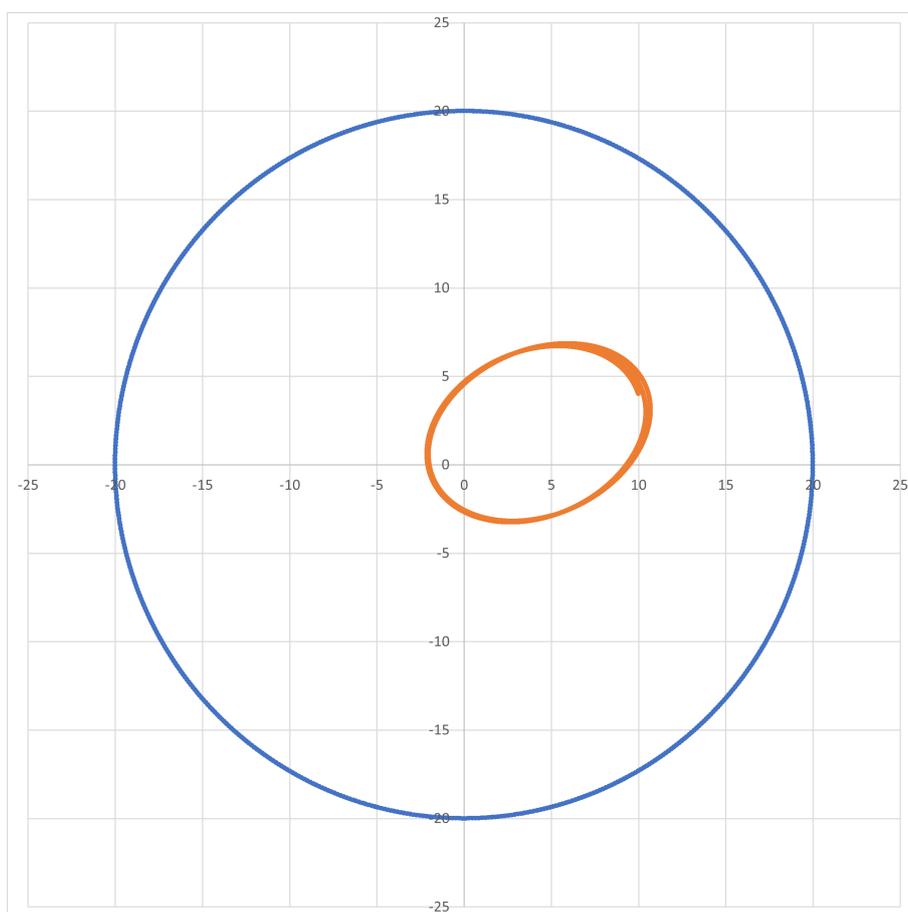


Figura 4.1: Orbita del pianeta interno con rapporto tra le masse pari a 34. L'orbita rimane fondamentalmente ellittica.

Man mano che il rapporto tra le masse diminuisce il moto del pianeta centrale diventa sempre più perturbato e le orbite diventano instabili come riportato in **Figura 4.2**.

Quando le masse diventano simili il pianeta interno non ha più orbite stabili (**Figura 4.3**), ed inizia ad avere un comportamento caotico.

Il peso del file prodotto dal foglio elettronico è in questo caso decisamente superiore a quello relativo al caso dei due corpi.

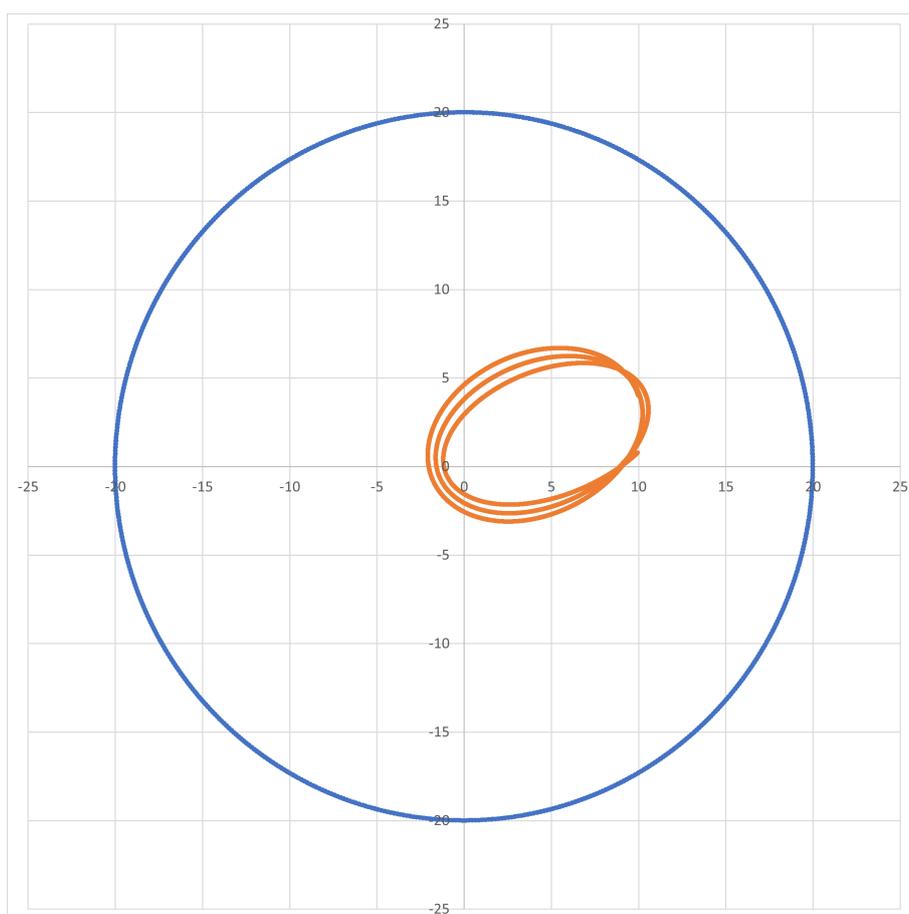


Figura 4.2: Orbita del pianeta interno con rapporto tra le masse pari a 4,25. L'orbita benché ancora vicina a un'ellisse risulta perturbata.

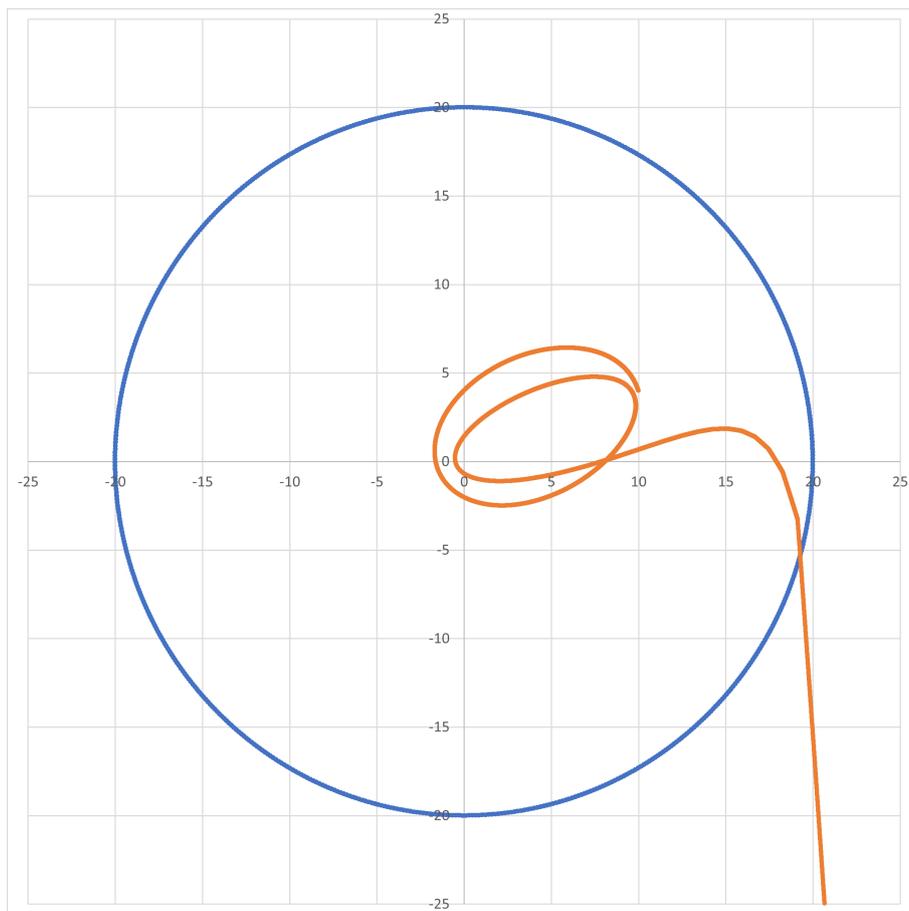


Figura 4.3: Orbita del pianeta interno con rapporto tra le masse pari a 1. Il pianeta interno non ha più orbite stabili.

4.2 Software a oggetti

Come si è già accennato precedentemente, il foglio elettronico rende il processo di calcolo di equazioni di ricorrenza più intuitivo, ma non costituisce una risorsa specificamente dedicata al calcolo numerico. Al contrario, i software a oggetti per la simulazione dell'evoluzione di sistemi meccanici sono di facile impiego, visualizzano i risultati in maniera affascinante, anche se può venire interpretato dagli studenti come una scatola nera da cui i risultati emergono tramite una procedura non trasparente. Come si è già puntualizzato nei capitoli precedenti, è necessario convincere gli studenti che i dati sono ottenuti come con il foglio elettronico (in forma appena più sofisticata), cioè risolvendo le equazioni del moto con discretizzazione temporale. Utilizzando il software a oggetti "Interactive Physics" è stata analizzata l'evoluzione di un sistema a tre corpi con il "Sole" ancorato nell'origine e due pianeti. Tutti i corpi si attraggono con forza gravitazionale senza che sia fissata la traiettoria del pianeta più massivo, a differenza del caso precedente. Agli studenti si può poi lasciare il compito di ottenere e visualizzare l'evoluzione del sistema per differenti rapporti delle masse dei pianeti e differenti condizioni iniziali. Nel caso di osservazione di esiti "catastrofici" (collisioni, allontanamento permanente di un pianeta dal sistema degli altri due, cambio di corpo attorno al quale avviene la rivoluzione etc.) gli studenti possono verificare che piccole differenze nelle condizioni iniziali portano ad evoluzioni con esiti di lungo periodo completamente differenti. Possono anche essere osservate le cosiddette fionde gravitazionali su corpi di piccola massa che simulano il volo satellitare verso pianeti esterni. Vediamo alcuni casi realizzati come esempio. Come primo caso è stato riprodotto un sistema in cui le masse del sole, del pianeta interno e del pianeta esterno sono rispettivamente 3, 0,005 e 0,005; come si vede in **Figura 4.4** in questo caso l'orbita di entrambi i pianeti rimane stabile, dal momento che il sole centrale ha una massa molto superiore ai due pianeti.

Andando poi ad aumentare la massa del pianeta esterno si iniziano a vedere l'instabilità del sistema, infatti prendendo un pianeta esterno con una massa pari a 0,5 si osservano le evoluzioni in **Figura 4.5**, **Figura 4.6** e **Figura 4.7** a seconda di quale sia la velocità iniziale del pianeta interno.

Come ultimo caso è interessante vedere il caso particolare della fionda gravitazionale, che è comunemente utilizzato nel volo spaziale per permettere a sonde e satelliti di raggiungere alte velocità senza consumare grandi quantità di carburante. Come si vede nell'esempio riportato in **Figura 4.8** l'orbita del pianeta esterno in seguito all'effetto fionda risulta più stretta, proprio a causa del fatto che ha ceduto parte della sua energia cinetica alla sonda accelerandola.

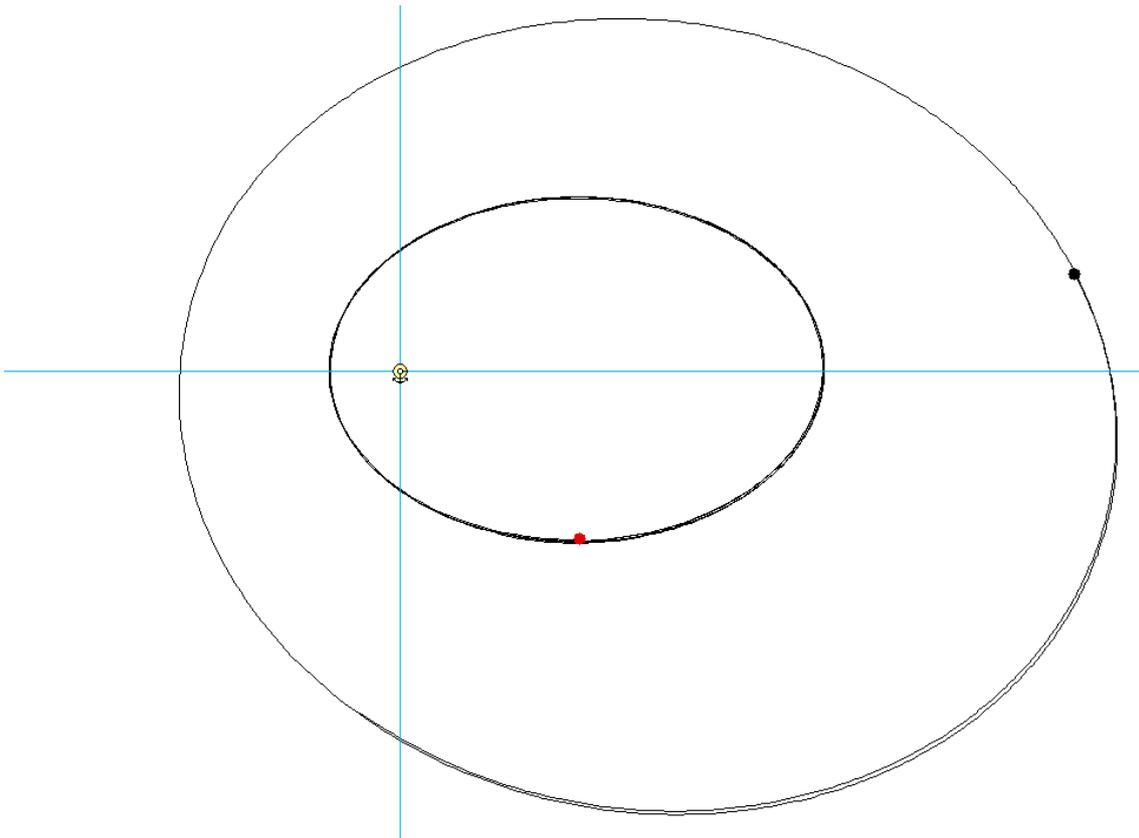


Figura 4.4: Sistema a tre corpi in cui le masse dei pianeti sono confrontabili tra di loro e piccole rispetto a quella del sole.

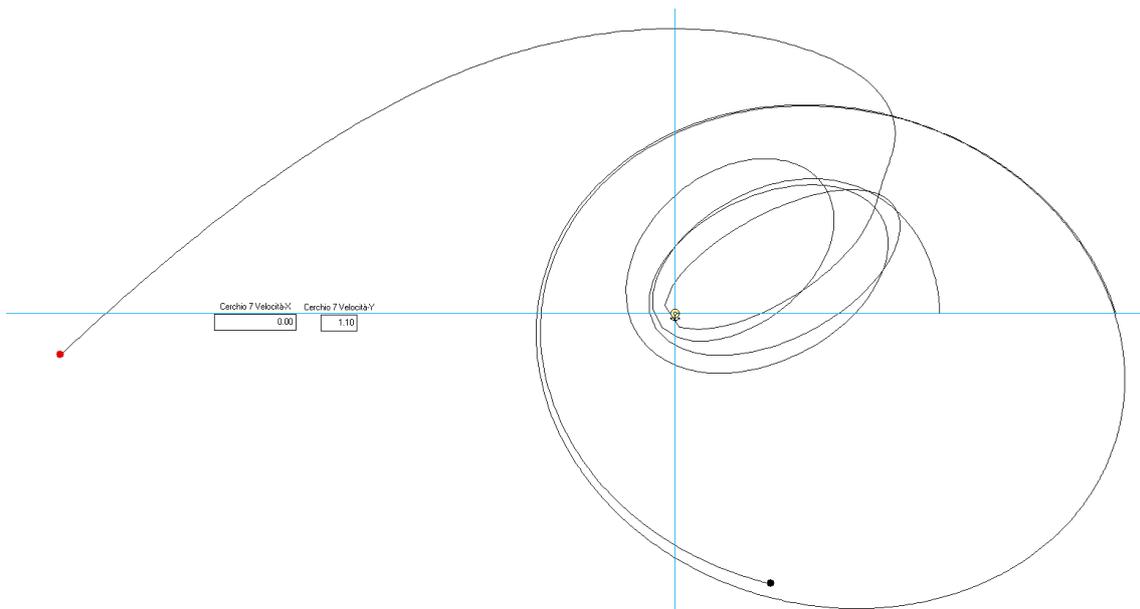


Figura 4.5: Sistema a tre corpi in cui il pianeta esterno ha una massa molto maggiore di quello interno, ma ancora piccola rispetto al sole. Il sistema non è più stabile e il pianeta interno dopo poche rivoluzioni si allontana.

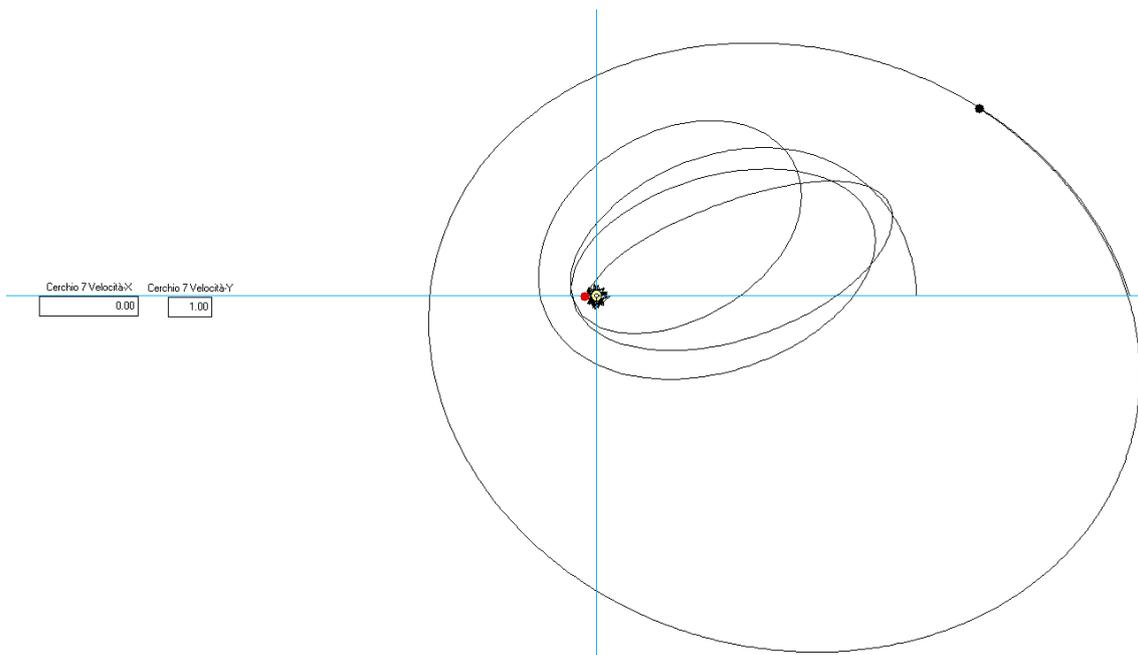


Figura 4.6: Sistema a tre corpi in cui il pianeta esterno ha una massa molto maggiore di quello interno, ma ancora piccola rispetto al sole. Cambiando le condizioni iniziali per il pianeta interno l'evoluzione differisce dal caso precedente ma porta sempre a esiti catastrofici.

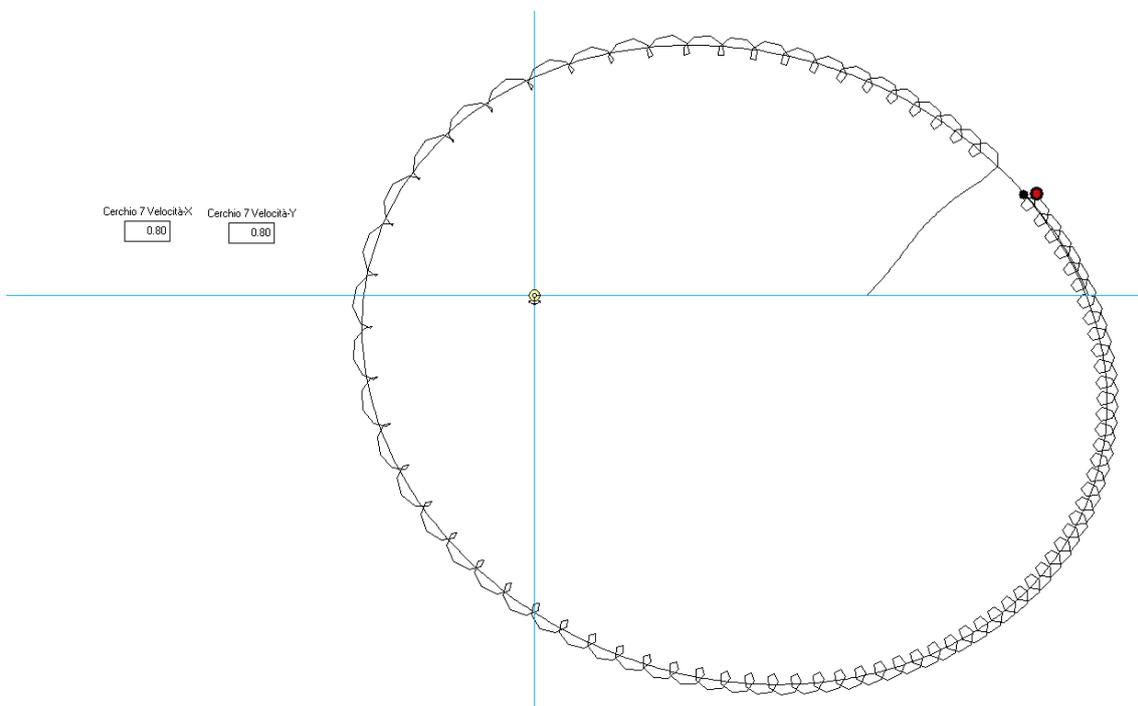


Figura 4.7: Sistema a tre corpi in cui il pianeta esterno ha una massa molto maggiore di quello interno, ma ancora piccola rispetto al sole. Con queste condizioni iniziali il pianeta interno finisce per orbitare intorno a quello esterno.

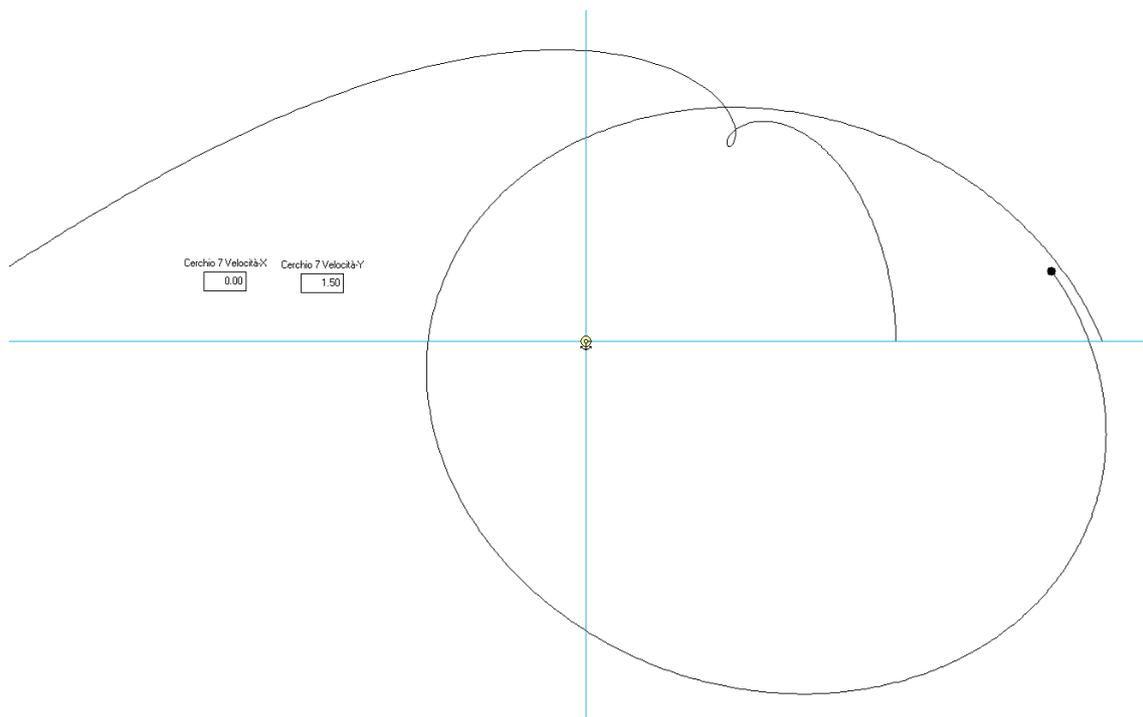


Figura 4.8: Visualizzazione dell'effetto fionda: il corpo interno è stato accelerato durante l'interazione con il pianeta esterno di massa maggiore. L'orbita del pianeta esterno risulta più stretta dopo l'interazione a causa della perdita di energia.

Conclusioni

Alcune parti della proposta discussa in questo lavoro di tesi sono state sperimentate e diffuse nel corso di attività didattiche e di formazione e presentate in Congressi dedicati alla Didattica della Scienza, in particolare:

- in due seminari nell'ambito delle conferenze sulla didattica della Fisica classica e moderna organizzata dai "Lincei per la scuola " nella sede di Latina nel 2018 e nel 2020;
- nel corso di formazione organizzato dal nostro Ateneo sulla didattica della fisica per i docenti della scuola secondaria di II grado, con interventi dei proff. Figari, Balzano e del dott. Amabile che hanno offerto spunti che sono stati poi ripresi dai docenti nelle loro classi;
- nei corsi di "Didattica della Fisica" della Laurea Magistrale in Fisica e di "Complementi di Fisica" della Laurea Magistrale in Matematica con l'elaborazione da parte degli studenti di programmi di integrazione numerica con due e tre corpi, con diversi metodi numerici e l'implementazione con fogli elettronici e programmi in Python e Matlab;
- in attività didattiche con studenti degli ultimi anni della scuola secondaria di II grado e in attività sperimentali sull'integrazione numerica dell'equazione del moto dell'oscillatore armonico e del moto dei pianeti anche con l'uso di simulazioni realizzate con Interactive Physics.

Complessivamente la proposta è stata ben accolta e si spera che questo lavoro di tesi possa offrire un ulteriore contributo alla sua definizione negli interventi attualmente in corso.

Ringraziamenti

Un primo grande grazie è dovuto ai professori Rodolfo Figari, Emilio Balzano e a tutto il gruppo di Didattica della Fisica per la guida e il supporto durante lo svolgimento di questo lavoro di tesi, e soprattutto per avermi aiutato a concludere questo percorso.

Il ringraziamento più grande va ai miei genitori: grazie di aver avuto la pazienza e la saggezza che avete dimostrato in questi anni, per avermi permesso di percorrere la mia strada con il mio passo, supportandomi sempre e non facendomi mai sentire in difetto. So che non è stato facile e vi sarò sempre grato.

Grazie anche a Martina, ci siamo trovati tardi ma anche se hai sempre fatto parte della mia vita averti al mio fianco in questo momento cruciale mi ha dato la forza di fare un passo in più quando non pensavo di potercela fare.

E infine grazie a tutti gli amici di una vita: siete la mia seconda famiglia e siete sempre riusciti a non farmi sentire solo. Anche se ormai siamo sparsi per il mondo vi sento sempre vicino e so che per me ci sarete sempre, quindi grazie di tutto quello che mi avete dato e che mi darete in futuro.

Bibliografia

- [1] RP Feynman. David, and jr goodstein. feynman's lost lecture: The motion of planets around the sun. w. w, 1996.
- [2] William Rowan Hamilton. The hodograph, or a new method of expressing in symbolical language the newtonian law of attraction. In *Proceedings of the royal irish academy*, volume 3, pages 344–353, 1847.
- [3] Charles Kittel, Walter D Knight, and Malvin A Ruderman. *La Fisica di Berkeley vol. 1: Meccanica*. Zanichelli, 1970.
- [4] Isaac Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*, volume 62. Jussu Societatis Regiae ac typis Josephi Streater, prostant venales apud Sam Smith, 2009.
- [5] György Pólya and George Pólya. *Mathematical methods in science*, volume 26. Cambridge University Press, 1977.
- [6] Lucio Russo. L'astronomo seleuco, galileo e la teoria della gravitazione. *Quaderni urbinati di cultura classica*, pages 143–160, 1995.
- [7] Lucio Russo. *La rivoluzione dimenticata: il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*. Feltrinelli Editore, 2001.
- [8] Arnold Sommerfeld. *Mechanics: Lectures on theoretical physics, Vol. 1*, volume 1. Elsevier, 2016.